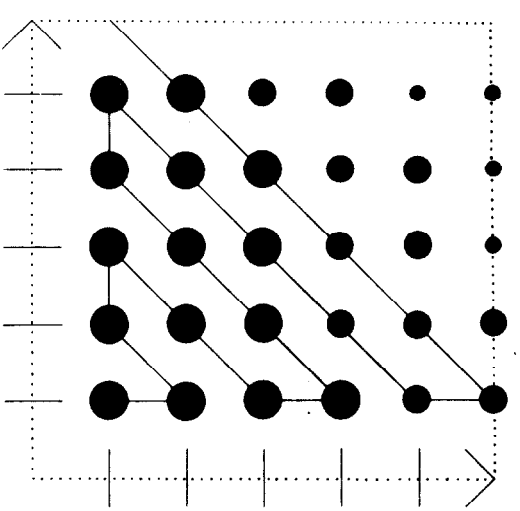
Études sur l'enseignement des mathématiques

Volume 3

préparé sous la direction de Robert Morris

L'enseignement des sciences fondamentales Mathématiques



Unesco

L'enseignement des sciences fondamentales

Publié en 1986
par l'Organisation des Nations Unies
pour l'éducation, la science et la culture
7,place de Fontenoy, 75700 Paris

Composition:
Solent Typesetting Ltd, Otterbourne, Royaume-Uni
Impression:
Imprimerie Floch, Mayenne, France

ISBN 92-3-202141-2

© Unesco 1986

Etudes sur l'enseignement des mathématiques

La formation des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire

Volume 3

préparé sous la direction de Robert Morris

Unesco

Préface

Le volume 3 des *Etudes sur l'enseignement des mathématiques* a été élaboré dans le cadre du programme entrepris par l'Unesco pour améliorer l'enseignement des mathématiques en produisant des ouvrages destinés à aider les professeurs qui en ont la charge. Les enseignants ont en effet un rôle essentiel à jouer dans cet effort, et ce volume analyse les responsabilités des instituteurs en ce qui concerne la composante mathématique du programme scolaire et les conséquences qui en découlent pour leur formation.

Le premier volume d'*Etudes sur l'enseignement des mathématiques* décrivait l'évolution de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de l'enseignement scolaire général en Hongrie, en Indonésie, au Japon, aux Philippines, en République-Unie de Tanzanie, au Royaume-Uni et en URSS.

Le deuxième volume étudiait les objectifs de l'enseignement des mathématiques et posait la question de savoir s'il répond aux besoins de la majorité des élèves et à ceux de la société.

Le directeur de la présente publication, Robert Morris, s'est attaché à harmoniser des textes provenant de seize pays tout en respectant le style propre à chaque auteur. L'Unesco lui exprime sa reconnaissance, ainsi qu'aux nombreux spécialistes qui ont apporté leur contribution à ce troisième volume d'*Etudes sur l'enseignement des mathématiques.*

Les opinions et les idées exprimées dans cet ouvrage sont celles des auteurs et ne reflètent pas nécessairement les vues de l'Unesco, ou du directeur de la publication.

Table des matières

Introduction 9

Le rôle des enseignants du primaire dans la composante mathématique du programme scolaire : conséquences pour la formation des maîtres *Josefina C. Fonacier* 13

Tendances actuelles des mathématiques dans le primaire : conséquences pour la formation des maîtres *Hilary Shuard* 23

L'environnement, source pour le programme de mathématiques élémentaires *Fidel M. Oteiza* 53

L'activité mathématique dans un contexte pédagogique : principes directeurs pour la formation en mathématiques des enseignants du primaire *Gerhard Walther* 71

L'informatique : les incidences de l'emploi des calculatrices et des ordinateurs sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire *David C. Johnson* 93

Les causes des difficultés conceptuelles en mathématiques pour les jeunes élèves *M. A. (Ken) Clements* 113

Aspects de la visualisation dans l'enseignement de la géométrie. Réflexions sur le cas de l'enseignement de la symétrie à l'école primaire *Michele Pellerey* 137

Aptitude spatiale et enseignement de la géométrie à la Jamaïque *Michael Mitchelmore* 143

L'élaboration et la résolution des "problèmes-récits" *Randall J. Souviney* 155

Eléments pour l'élaboration de programmes d'évaluation de la formation des enseignants *Peggy A. House et Thomas R. Post* 163

Tendances actuelles de la formation initiale des enseignants du primaire en mathématiques *Andrew Herriot* 187

Tendances actuelles de la formation continue des enseignants du primaire en mathématiques *Alan Osborne et James Schultz* 203

Le projet de formation en cours d'emploi des enseignants du Swaziland (1973–1977) *Bryn Roberts* 221

Formation en cours d'emploi des enseignants en exercice non diplômés : étude de cas *Maria do Carmo Vila et Reginaldo N. de Souza Lima* 231

L'aide des associations d'enseignants et de la radio aux enseignants de mathématiques *Benjamin Eshun, Klaus Galda et Peter Sanders* 237

Comment entretenir un climat favorable : les clubs de mathématiques *P. K. Srinivasan* 249

Rôle d'un IREM dans l'aide aux professeurs de l'enseignement élémentaire *Guy Brousseau* 255

Notices biographiques 273

Introduction

La formation des enseignants constitue le maillon le plus fragile de la chaîne de l'enseignement des mathématiques : telle fut la conclusion unanime de la *Réunion d'experts sur les objectifs de l'enseignement des mathématiques*, dont le compte rendu figure dans le volume 2 de la présente série. C'est pourquoi il a été décidé de consacrer la totalité des volumes 3 et 4 des Etudes au thème de la formation des professeurs de mathématiques.

Le présent volume porte essentiellement sur les impératifs de la formation des personnes qui enseigneront les mathématiques à l'école primaire. Pour traiter cette question, il a été jugé souhaitable de s'attacher, tout d'abord, à définir la nature des mathématiques qui devraient être enseignées dans les écoles primaires : caractéristiques particulières, sources d'inspiration, tendances, implications de l'immaturité mentale des élèves et du caractère limité de leur expérience. Une fois ces précisions apportées, il devient possible de déterminer les tâches des enseignants, et d'en tirer des conclusions sur la façon de les préparer à les accomplir et sur l'aide dont ils ont besoin pour résoudre les problèmes qu'ils rencontreront au cours de leur carrière.

Comme pour les volumes précédents de cette série, des contributions ont été sollicitées dans les régions les plus diverses. L'Afrique, l'Amérique latine, l'Amérique du nord, l'Asie, les Caraïbes, l'Europe et le Pacifique sud y sont représentés. Certains des auteurs ont une longue expérience, d'autres une expérience particulière, d'autres encore sont des spécialistes connus de tel ou tel domaine spécifique ; ils sont enseignants, formateurs d'enseignants, responsables de l'élaboration des programmes scolaires et chercheurs. Ces points de vue divers concourent tous à enrichir l'ouvrage. Cependant, aussi surprenant que cela puisse paraître, ces différents auteurs ont une conception remarquablement similaire de ce que devrait être l'initiation aux mathématiques à l'école primaire. Il est donc permis d'espérer que les enseignants et les autres personnes concernées par cette question seront stimulées par cette harmonie et qu'elles trouveront certaines des méthodes préconisées utiles et applicables à leurs situations particulières.

Les deux premiers chapitres sont de caractère général. Il en ressort que les maîtres chargés d'enseigner les mathématiques à l'école primaire doivent avoir une connaissance approfondie de cette discipline et savoir comment elle s'applique dans la vie quotidienne. En même temps, il faut qu'ils comprennent les caractéristiques propres à l'enfance et l'évolution des modes de pensée en fonction de la croissance. Quant aux tendances actuelles, elles semblent résulter de trois facteurs : un intérêt de plus en plus marqué pour le développement personnel des jeunes ; l'accessibilité croissante des calculatrices ; une meilleure connaissance de l'apprentissage et du rôle qu'y joue le langage, des attitudes à l'égard des mathématiques et de la façon dont les problèmes sont résolus.

Le troisième chapitre traite de l'importance de l'environnement comme source de problèmes qu'on ne peut ignorer et comme cadre dans lequel les mathématiques peuvent trouver une place qui contribue à les faire apprécier. En revanche, le quatrième porte plutôt sur ce qui se passe effectivement en classe : manière de conduire les enfants sur le chemin de la découverte sans rien révéler de leur destination ; différence entre l'apprentissage informel et l'apprentissage planifié ; importance des problèmes, à la fois comme illustration du cours et comme défi lancé à la réflexion ; place que tient leur solution dans le programme de formation ; moyens d'aiguiller les élèves et de conduire ce processus.

Le chapitre sur les ordinateurs et les calculatrices sera sans doute aussi contesté qu'il est passionnant. Selon l'auteur, c'est en les utilisant comme outils d'exploration des notions mathématiques que l'on tirera les plus grand profit de ces moyens, qui permettent d'élargir considérablement l'éventail et la portée des activités mathématiques à l'école. L'histoire des différentes "machines à calculer" utilisées à travers les âges est succinctement retracée, ce qui permet de mieux situer les instruments actuels tout en mettant en question la nécessité d'enseigner les algorithmes traditionnels des mathématiques élémentaires. Cela pose deux questions importantes pour les programmes scolaires de l'avenir : quelle devrait être la nature de la formation de base à l'arithmétique ? comment peut-on développer un "sens des nombres" ? Quelques suggestions sont faites pour y répondre.

Les quatre chapitres suivants traitent des concepts. Le premier tente de clarifier la signification de ce mot et identifie trois types de facteurs qui contribuent aux difficultés conceptuelles : les facteurs externes, internes et linguistiques. Il est suivi d'une analyse pénétrante des difficultés inhérentes au concept de symétrie, d'une description des problèmes posés à un groupe d'enfants par les concepts spatiaux et de l'exposé d'une méthode utilisée pour initier à la solution de problèmes des élèves dont la langue maternelle est différente de la langue d'enseignement.

Les cinq chapitres suivants sont consacrés à la formation initiale et en cours d'emploi des enseignants. Le premier aborde la question de

l'évaluation et découvre une lacune dans ce que nous savons sur les qualités d'un bon professeur. Cette lacune rend toute évaluation pour le moins difficile. Faute de savoir ce qu'il convient d'évaluer, divers critères sont proposés pour clarifier différentes stratégies d'enseignement et celles-ci deviendienent progressivement un ensemble de principes qui continueraient à s'affiner au fil de leurs applications pour atteindre des niveaux d'analyse de plus en plus sophistiqués. Ce chapitre est suivi d'une étude de cas concernant un programme de formation initiale en Afrique australe. Puis, c'est la formation des enseignants en exercice qui est examinée : son importance, sa relation avec le travail à l'école, ses implications pour les personnes qui sont chargées de l'organiser et pour celles qui l'assurent effectivement. Ce chapitre est suivi de deux études de cas portant sur des programmes relatifs à ce type de formation qui ont été entrepris en Afrique et en Amérique latine.

L'ouvrage s'achève avec trois chapitres consacrés aux programmes de soutien des professeurs de mathématiques à l'école primaire. Le premier traite du rôle des associations d'enseignants et en particulier de l'Association ghanéenne pour les mathématiques, et examine les avantages de l'emploi de la radio en se référant à un projet réalisé au Nicaragua. Le deuxième évalue l'apport des clubs de mathématiques mis en place dans des établissements scolaires et des Ecoles normales. Le dernier a trait aux activités des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) créés en France. Ces activités sont de trois types : recyclage des enseignants, production de matériels pédagogiques et recherche fondamentale sur les méthodes d'enseignement des mathématiques.

Josefina C. Fonacier

Le rôle des enseignants du primaire dans la composante mathématique du programme scolaire : conséquences pour la formation des maîtres

L'homme, par sa nature même, étudie continuellement son environnement : il cherche à le maîtriser afin d'améliorer ses conditions de vie et à le préserver pour les générations futures. Pour communiquer ses idées, il doit utiliser le langage. Au stade le plus rudimentaire, des mots descriptifs comme *petit, plus petit, chaud, plus chaud, dessus, un petit peu plus haut, à droite, encore un peu à droite,* sont utiles. Quand des descriptions plus précises sont nécessaires pour savoir dans quelle mesure c'est petit, chaud, plus haut, ou plus à droite, on entre dans le monde des mathématiques. Celles-ci permettent d'étudier et d'organiser les observations et deviennent un élément déterminant de la décision.

Les mathématiques émergent donc de l'environnement de l'homme et de ses expériences, et elles peuvent être appliquées pour approfondir l'étude de l'environnement.

A mesure que les facultés intellectuelles de l'homme se développent, il devient capable de hisser les mathématiques au-delà de ses expériences physiques, jusqu'à un niveau de pensée plus élevé, faisant intervenir des concepts et un symbolisme dans un monde mathématique où on découvre les relations et les principes par la manipulation des symboles. L'homme renvoie au niveau pratique beaucoup des connaissances nouvelles qu'il acquiert pour les réutiliser dans son étude du monde physique. Cependant, une partie de ces acquis reste dans la sphère des mathématiques pures provisoirement rangéesur l'étagère des abstractions avant d'en redescendre pour servir à une élaboration plus poussée des mathématiques ou à une tâche concrète, dans le cas où quelqu'un lui trouve une application concrète.

On pourrait tirer des paragraphes précédents un canevas pour la composante mathématique du programme scolaire. Un problème qui se pose dans le monde physique oblige à étudier quelques éléments mathématiques et à élaborer, renforcer ou élargir certains concepts et certaines techniques mathématiques. Le résultat est ensuite utilisé pour résoudre le problème à l'origine de la recherche de même que d'autres problèmes similaires.

Les problèmes à résoudre peuvent varier d'un pays à l'autre ou d'une

époque à l'autre. On peut abandonner de vieux procédés quand on en élabore de nouveaux ou de plus perfectionnés. En dehors des notions fondamentales, les contenus de l'enseignement des mathématiques peuvent donc différer. Cependant, quelle que soit la région du monde ou l'époque, les aptitudes intellectuelles sur lesquelles repose l'activité mathématique restent utiles, même dans un contexte non mathématique.

Le place des mathématiques dans le programme de l'école primaire

A l'école primaire, les mathématiques devraient donc, au minimum et en premier lieu, fournir à l'homme certains éléments et certaines techniques de base qui lui sont nécessaires pour s'attaquer à des problèmes concrets. Elles devraient, en second lieu, cultiver les capacités de réflexion et de raisonnement, et renforcer ainsi les fondements intellectuels des interactions humaines dans la société.

Vers la fin des années soixante-dix, les enseignants chargés des mathématiques parlèrent beaucoup de "retour aux bases". Une déclaration du *National Council of Supervisors of Mathematics* (NCGM) (1978, p. 148) présentait la question en ces termes :

> La société technologique actuelle nécessite l'utilisation quotidienne de techniques comme l'estimation, la résolution de problèmes, l'interprétation des données, leur organisation, la mesure, la prédiction et l'application des mathématiques aux situations de la vie quotidienne. L'évolution des besoins de la société, la multiplication des données numériques exigent que l'on redéfinisse les priorités concernant les techniques mathématiques fondamentales.

Cette déclaration distingue clairement les "techniques à orientation professionnelle".

Nous n'établirons pas une liste des notions et techniques fondamentales. Cependant, pour en citer quelques-unes, rapport et proportion doivent assurément continuer à figurer sur la liste. Il semble qu'on insiste plus sur les nombres décimaux et moins sur les fractions. Avec l'adoption universelle du système métrique, l'importance d'autres systèmes décline et, du même coup, la conversion d'un système à l'autre est en train de passer de mode. L'utilisation de tableaux et de graphiques est popularisée par les moyens d'information ; le public éclairé doit être capable de les lire et de les interpréter, et il est donc important d'inclure parmi les techniques fondamentales la lecture et l'interprétation des tableaux et graphiques.

Les erreurs de calcul illustrées par les exemples suivants montrent pourquoi il est proposé d'inclure l'estimation parmi les techniques de base.

34	34
− 19	− 9
= 25	= 35

Ces deux examples illustrent une erreur commise fréquemment en soustrayant dans la même colonne le chiffre le plus petit du chiffre le plus grand, sans tenir compte de l'ordre. L'enfant habitué à estimer se rendra compte, au moins, que la seconde réponse est inexacte. La différence ne peut être supérieure au premier terme de la soustraction. L'erreur est moins évidente dans la première réponse, mais l'enfant plus éveillé, exercé à considérer d'un oeil critique la vraisemblance de ses résultats, peut aussi la déceler.

Le fait que la solution de problèmes devrait figurer parmi les techniques fondamentales est admis par les enseignants traditionnels eux-mêmes. Considérons les problèmes suivants :

(a) $50 \div 12$.

(b) Une troupe de scouts en excursion a emporté 50 kg de riz. Ce riz doit servir pour 12 repas et on cuit la même quantité à chaque repas : combien de kilos de riz doit-on cuire à chaque repas ?

(c) Une troupe de 50 scouts est partie à pied pour une excursion. Ils arrivent à une rivière qu'on peut traverser en radeau. Si le radeau peut transporter 12 personnes à la fois et fait le plein à chaque traversée, combien de scouts a-t-il pris pour la dernière traversée ?

Le calcul à effectuer est le même pour chaque problème, mais les aptitudes requises sont différentes. Le problème (a) ne comporte qu'un exercice numérique. La situation décrite sous (b) est simple et claire. Il faut comprendre cet énoncé écrit et maîtriser la technique nécessaire pour résoudre le problème (a). Le problème (c) est moins simple. Il faut comprendre, mais aussi réfléchir davantage. C'est pour la solution des problèmes que la compréhension et la réflexion (opposées à la technique mécanique) sont déterminantes.

L'aptitude à la réflexion est essentielle à toute activité humaine. En mathématiques, la réflexion intervient lorsque nous élaborons nos perceptions de l'espace, lorsque nous mesurons, lorsque nous organisons des données, lorsque nous formulons et testons des suppositions ou lorsque nous cherchons à deviner et, bien sûr, lorsque nous faisons des déductions logiques. Toutes ces activités peuvent être qualifiées de processus mathématiques, parce qu'elles sont utilisées quand on fait des mathématiques. Cependant, elles ne sont pas spécifiques aux processus mathématiques. On les utilise aussi dans d'autres disciplines et dans d'autres domaines d'action de l'homme.

Outre les deux objectifs généraux des mathématiques scolaires énon-

cés ci-dessus, d'autres objectifs sont liés au domaine affectif. Il semble qu'on mette de plus en plus l'accent sur l'humanisme : on s'attache à inculquer des valeurs et des attitudes. On peut favoriser cette tendance en mathématiques. Ainsi, cette matière contribuera à la réalisation de l'objectif global de l'éducation : le plein développement de l'individu en tant que personne et en tant que membre de la société.

Le rôle des enseignants de mathématiques dans la composante mathématique du programme scolaire

Le maître lui-même est le meilleur des moyens pédagogiques dont il dispose.

Il a envers ses élèves, et envers la société tout entière, la responsabilité d'exploiter au mieux ce moyen. Il faut connaître les mathématiques pour les enseigner. Le maître doit donc, d'abord et surtout, comprendre les fondements de cette discipline et maîtriser les techniques correspondantes. Il doit aussi savoir ce qu'on entend par "faire des mathématiques".

Les spécialistes de l'éducation considèrent les mathématiques comme un des meilleurs moyens de développer les capacités de réflexion. En disant, comme on le fait souvent, que si on est bon en mathématiques, on peut être un bon joueur d'échecs, on ne songe pas à l'aptitude au calcul mais à l'aptitude au raisonnement. Le maître doit être capable de confirmer cette idée (les mathématiques sont un moyen efficace de développer les capacités de réflexion) et non se contenter de la reprendre à son compte pour la forme. Dans le processus d'enseignement des mathématiques, le maître doit savoir saisir les occasions de développer les capacités de raisonnement et de cultiver chez l'enfant l'habitude d'organiser sa réflexion.

Les mathématiques ne doivent pas être considérées comme un corps de connaissances isolé. Le maître doit être capable de distinguer les mathématiques dans l'environnement et dans les autres disciplines. C'est important sur le plan pédagogique, car l'enseignant doit utiliser ou imaginer des expériences ou des situations qui puissent permettre aux enfants de découvrir et d'élaborer les mathématiques qui leur sont inhérentes. Pour employer un langage technique, on utilise une situation concrète pour introduire et élaborer un "modèle mathématique" qui en rende compte.

D'autre part, l'enseignant capable de distinguer facilement les mathématiques dans l'environnement peut sans doute déterminer les situations différentes auxquelles s'appliquent des descriptions mathématiques semblables. Dans ce cas, un modèle mathématique unique permet de rendre compte de plusieurs situations, de même que les deux situations différentes auxquelles les scouts étaient confrontés faisaient appel au même calcul de $50 \div 12$. Le maître doit aider les enfants à

découvrir comment les mathématiques s'insèrent dans leur expérience, puis à les appliquer à d'autres situations qui leur sont peut-être étrangères.

Un argument souvent avancé pour justifier l'étude des mathématiques est qu'elles constituent un outil important, très employé en science et en technologie. Il ne suffit pas de le dire aux enfants. Il faut les en convaincre par des exemples précis. L'enseignant qui connaît bien la communauté et l'environnement dans lesquels s'insèrent les enfants saura peut-être faire apparaître des liens significatifs entre les mathématiques, d'une part, et la science et la technologie, d'autre part, et contribuer ainsi à convaincre les élèves.

Les orientations et la politique nationales ont des répercussions sur les programmes d'enseignement des mathématiques. Le maître devrait donc les connaître et s'efforcer de lier plus étroitement le contenu de son enseignement à ce qui s'apprend et se fait en dehors de la classe en relation avec cet effort national, tout au moins dans l'entourage de l'enfant ou dans la collectivité où il vit. Des exemples peuvent être pris dans le domaine du développement rural, de l'amélioration de la nutrition, de l'hygiène, de la santé, et de l'éducation en matière de population. On peut simuler en classe des activités se rapportant au domaine de l'économie. Selon les termes de Broomes (1981, p. 60) :

> Il faut trouver des méthodes qui non seulement permettent aux enseignants et aux élèves de faire preuve de créativité en classe de mathématiques, mais qui offrent aussi, et c'est particulièrement important, la possibilité de faire en sorte que les mathématiques étudiées en classe soient appliquées à d'autres matières du programme scolaire et à l'extérieur de l'école. En outre, il convient que le monde extérieur influe sur les mathématiques qui doivent être étudiées dans les établissements scolaires.

Toute situation d'enseignement et d'apprentissage devrait conduire le maître à réfléchir à l'interaction entre l'élève, la matière enseignée, et le contexte ou la collectivité et la société en général. Il nous reste à considérer l'élève. L'enseignant du primaire doit être réceptif à l'enfant. Il doit savoir comment celui-ci comprend certains concepts. Il doit avoir conscience de son point de vue, du caractère limité de ses perceptions, de son degré d'abstraction et du langage qu'il utilise. Bref, il doit connaître l'enfant.

Il faut des plans d'enseignement particuliers pour faire comprendre à un enfant la notion de "volume", pas seulement ce que l'on règle en tournant le bouton d'une radio, élément qui fait partie de son expérience, mais aussi le concept mathématique de quantité d'espace occupée. Autre exemple : on habitue couramment les jeunes enfants à considérer la multiplication comme une addition répétée. Ils peuvent donc éprouver

des difficultés à conceptualiser $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$, où l'addition répétée n'intervient pas. L'enseignant qui prévoit cet obstacle organisera sa stratégie pédagogique de manière à élargir la notion de multiplication avant que les difficultés n'apparaissent. Une situation semblable se présente quand on exerce les enfants à la soustraction en utilisant le langage suivant :

1 ôté de 10 égale 9
2 ôté de 10 égale 8
3 ôté de 10 égale 7

Cet exercice met l'accent sur l'idée d'"ôter" et tend à exclure l'idée de comparer (c'est-à-dire de déterminer combien en plus ou combien en moins) qui fait aussi appel à la soustraction.

Citons un dernier exemple. Il n'est pas rare qu'un enfant qui a du mal à effectuer la division $600 \div 25$ réponde facilement à la question : "Combien faut-il de pièces de 25 cents pour faire 6 dollars" ? Le maître qui s'en rend compte peut partir de là pour enseigner l'opération, qui est plus difficile.

Les perceptions de l'enfant constituent le point de départ de son apprentissage. Les idées qu'il apporte en classe et ses expériences passées influent sur la façon dont il reçoit une information nouvelle. Il est donc important que les maîtres déterminent ce que leurs élèves savent déjà sur les concepts ou les principes qu'ils veulent leur incluquer. Cette connaissance des perceptions des élèves leur fournira des indications sur le moment et la façon de présenter des idées nouvelles. Elle peut aussi servir à lier l'enseignement scolaire aux réalités de la vie dans la collectivité.

Conséquences pour la formation des maîtres

Il découle de ces considérations qu'il est particulièrement important d'inclure les objectifs suivants dans la formation des enseignants de mathématiques :

Compétence en ce qui concerne les concepts et les techniques nécessaires dans la vie quotidienne, sur le lieu de travail et pour comprendre la collectivité et l'environnement immédiat (c'est-à-dire, les mathématiques en tant que connaissances) ;

Maîtrise des techniques intellectuelles et des habitudes de réflexion organisée qui sont nécessaires quand on fait des mathématiques et qui sont caractéristiques du comportement humain (c'est-à-dire, les mathématiques en tant que processus) ;

Aptitude à distinguer les mathématiques dans les situations du monde physique, dans les autres disciplines et dans l'environnement (c'est-à-dire, les mathématiques en tant que modèle ou instrument) ;

Connaissance des habitudes, valeurs et attitudes qui peuvent/doivent

être encouragées dans l'enseignement primaire, en particulier dans sa composante mathématique ;

Capacité de comprendre la nature de l'enfant : son passé, ses besoins, ses perceptions, ses modes d'apprentissage, ses aptitudes ;

Familiarisation avec les diverses techniques d'enseignement utilisables pour atteindre des objectifs spécifiques : répertoire des techniques pédagogiques que l'enseignant peut exploiter face à diverses situations ;

Une certaine compétence en ce qui concerne l'élaboration de techniques et de stratégies d'enseignement, notamment pour favoriser la créativité et l'innovation.

Traditionnellement, on pensait que le type de réflexion qui intervient dans l'activité mathématique ne va pas au-delà du raisonnement déductif. On se rend compte aujourd'hui que d'autres aptitudes intellectuelles, communes à l'ensemble du comportement intellectuel rationnel entrent aussi en jeu. De nombreux articles, écrits ces dernières années sur l'utilisation pédagogique de l'investigation personnelle, témoignent de cette prise de conscience. Le développement d'aptitudes, qu'elles soient concrètes ou abstraites, et quelle qu'en soit la nature, ne peut reposer que sur la pratique. L'enseignement doit donc permettre cette pratique. Dans la formation normale des maîtres, le professeur de mathématiques présente un corps logique de connaissances bien organisé, achevé et quasiment parfait. Les étudiants n'ont donc guère l'occasion de cultiver vraiment ces aptitudes intellectuelles. Invariablement, le futur maître apprend donc les mathématiques par une méthode différente de celle qu'on lui dit d'employer pour enseigner.

Le professeur de mathématiques idéal pour les futurs maîtres est celui qui, dans son propre processus pédagogique, enseigne la méthodologie par l'exemple. Il doit constituer un exemple dans la transmission non seulement du contenu mathématique mais aussi des techniques d'enseignement.

Une enquête récente sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles des Philippines a montré qu'il existe une corrélation entre la maîtrise du calcul par les enseignants eux-mêmes et le niveau où ils enseignent : plus ce niveau est élevé, plus leur aptitude au calcul est grande. On est tenté d'en conclure rapidement que les maîtres des petites classes sont moins bien formés en mathématiques que ceux des classes plus élevées. Cependant, il y a peut-être une autre explication.

Le calcul figure dans la liste des techniques de base. Il faut présenter les exercices correspondants sous plusieurs aspects. On doit expliquer non seulement les manipulations mécaniques, mais aussi les principes qui les sous-tendent et les relations entre les différentes techniques de manipulation. Ces explications multiples sont particulièrement nécessaires aujourd'hui, compte tenu de l'existence des calculatrices. Le manque de pratique, plutôt que l'incompétence, pourrait expliquer

que les enseignants des petites classes sont moins experts en calcul que ceux des grandes classes. Ainsi, alors que l'aptitude de base au calcul se définissait, traditionnellement, comme la maîtrise des techniques de manipulation mécanique, on serait fondé à penser aujourd'hui qu'il faut faire en sorte que les manipulations nécessaires, les principes qui les sous-tendent et la façon dont elles se relient les unes aux autres soient des notions familières aux enseignants en formation. En outre, il faut faire en sorte que les enseignants en formation comprennent qu'il leur incombera de transmettre toutes ces notions à leurs élèves.

L'enquête effectuée aux Philippines a montré, par ailleurs, quelles matières du programme les maîtres préfèrent. En général, (et particulièrement pour les trois ou quatre premières années), un maître du primaire doit enseigner toutes les matières du programme et pas seulement les mathématiques. Une des questions posées demandait aux personnes interrogées d'indiquer dans l'ordre les deux matières qu'elles préféraient enseigner. Il est surprenant de constater qu'une minorité seulement a placé les mathématiques au premier ou au deuxième rang. Les maîtres, semble-t-il, enseignent les mathématiques parce qu'ils y sont obligés. S'ils avaient le choix, ils préféreraient ne pas enseigner cette matière. Cette constatation a des implications pour leur formation. Si on pouvait concevoir un cours de formation qui communique aux enseignants (au moins dans une certaine mesure) la passion des mathématiques, on pourrait aborder plus facilement les questions du contenu et des méthodes de leur enseignement. Les attitudes peuvent être contagieuses. Un maître qui aime les mathématiques transmet inconsciemment ce goût et le communique ainsi à ses élèves. Si l'on apprécie ce que l'on fait à l'école, le processus d'apprentissage est beaucoup plus facile.

Comme l'instituteur du primaire est censé enseigner toutes les matières du programme, il est inévitable que sa formation initiale soit un amalgame de cours très divers. Cependant, quand l'étudiant commence à enseigner, on découvre peu à peu quelles sont ses matières préférées et ses besoins en tant que pédagogue. Après quelques années d'expérience professionnelle, le maître commence à s'interroger sur son propre enseignement, ses espoirs et ses déceptions, ses points forts et ses lacunes. En outre, après quelques années de pratique, ceux qui trouvent de l'attrait à l'enseignement des mathématiques commencent à devenir identifiables. En les encourageant et en les aidant, on leur permettrait de progresser plus vite, ce qui pourrait aussi contribuer, en même temps, à aider d'autres enseignants. S'il a l'occasion d'observer un bon exemple d'enseignement des mathématiques en présence d'élèves, un maître en tirera sans doute plus de profit pour sa propre méthodologie que des principes psychologiques et des théories pédagogiques qu'il pourrait glaner dans un livre.

Un processus continu de formation des maîtres en exercice est donc évidemment nécessaire, à la fois pour aider tous les enseignants de

mathématiques à résoudre leurs problèmes pédagogiques, et pour permettre aux maîtres les plus attirés par les mathématiques d'améliorer leur valeur d'exemple et d'aider leurs autres collègues "non en (les) noyant sous les directives et les conseils, mais en (les) faisant participer à une réflexion collective et à une critique constructive de la fonction enseignante, en (leur) donnant le sens de (leur) responsabilité et les moyens de l'exercer". (Revuz, 1981, p. 112).

Conclusion

On a tenté, dans ce chapitre, de faire un tour d'horizon de la question pour introduire les chapitres suivants. Certains aspects du programme scolaire de mathématiques, de l'enseignement des mathématiques et de la formation des personnes chargées d'enseigner les mathématiques dans le primaire, et certains problèmes qui se posent dans ces domaines ont été soulevés. Ces questions et d'autres encore seront reprises et étudiées de façon plus approfondie dans les chapitres qui suivent. On ne prétend pas ici à l'originalité. Les points abordés ont tous été déjà soulevés. Si l'on peut, toutefois, discerner une différence entre le présent et le passé, elle tient au fait que les mathématiciens, les spécialistes de la formation dans le domaine des mathématiques et les enseignants d'aujourd'hui commencent délibérément et méthodiquement à aborder des questions qui, pendant trop longtemps, n'ont guère préoccupé la société.

Références

BROOMES, D. 1981. Les objectifs de l'enseignement des mathématiques au service du développement rural. Dans : R. Morris (dir. pub.) *Etudes sur l'enseignement des mathématiques,* Vol. 2, pp. 45–65, Paris, Unesco.

NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISORS OF MATHEMATICS. 1978. Position statements on basic skills. *The Mathematics Teacher,* Vol. 71, No. 2, pp. 147–151.

REVUZ, A. 1981. Les objectifs de l'enseignement des mathématiques compatibles avec le développement des mathématiques en tant que discipline. Dans R. Morris (dir. pub.) *Etudes sur l'enseignement des mathématiques,* Vol. 2, pp. 105–116, Paris, Unesco.

Hilary Shuard

Tendances actuelles des mathématiques dans le primaire : conséquences pour la formation des maîtres

Les objectifs des mathématiques dans le primaire

Certains des objectifs de l'éducation mettent l'accent sur le fait que la société a besoin de citoyens et de travailleurs capables de lire, d'écrire, de faire des calculs simples et de répondre aux exigences des technologies agricoles et industrielles. D'autres insistent sur l'épanouissement de l'individu en tant que personne indépendante, dont l'éducation est organisée de manière à l'aider à comprendre et à apprécier pleinement la vie. Dans l'enseignement des mathématiques, la progression vers ces deux catégories d'objectifs commence à l'école primaire, où beaucoup d'enfants de nombreux pays acquièrent toutes les mathématiques formelles qu'ils apprendront jamais. Dans *The Teaching of Mathematics in Primary Schools* (1956), rapport de la Mathematical Association (Royaume-Uni) où l'avenir était envisagé avec clairvoyance, les objectifs reposaient nettement sur le développement de la pensée individuelle :

> Le but de l'enseignement primaire [. . .] est de poser les bases de la réflexion mathématique portant sur les aspects numériques et spatiaux des objets et des activités que rencontrent les enfants de cet âge.

Ce point de vue a été confirmé par le Corps des inspecteurs scolaires (H.M. Inspectors of Schools) (Department of Education and Science, 1979), dans un document sur les mathématiques à l'école primaire :

> Nous enseignons les mathématiques pour aider les personnes à mieux comprendre les choses : par exemple, à comprendre les emplois auxquels ils seront plus tard affectés, les créations de l'esprit humain ou le fonctionnement du monde naturel. Les idées centrales autour desquelles s'articulent les mathématiques, ont le pouvoir particulier de nous aider dans tous ces domaines.

Cette tendance à mettre l'accent sur le développement de l'individu ne se manifeste pas seulement dans les objectifs des programmes scolaires des pays développés. Le rapport *Mathematics Education at Pre-School and Primary Level,* présenté en 1976 au troisième *Congrès international*

sur l'enseignement mathématique (ICME) (Athen et Kunle, 1977) exprimait un point de vue mondial :

Suivant le principe qu'il n'y a pas de différence de nature entre la pensée de l'enfant et celle du mathématicien, l'apprentissage de mécanismes et leur application aux problèmes classiques tend lentement mais inéluctablement à être remplacé par des activités permettant à l'enfant d'apprendre à chercher et d'utiliser sa capacité d'invention, faisant appel à son désir de comprendre, lui donnant la possibilité d'élaborer sa propre stratégie de recherche et d'éprouver le plaisir de résoudre un problème, mobilisant les connaissances théoriques et pratiques qu'il a déjà acquises, et l'invitant à proposer de nouvelles questions.

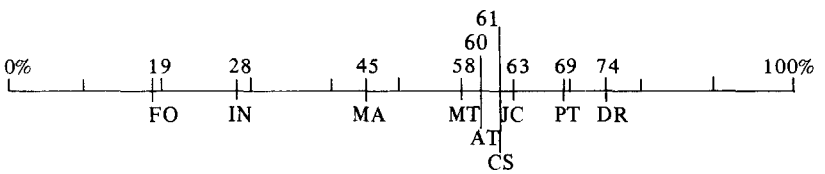
Il est indéniable que la réalisation d'objectifs tels que ceux-là se heurte à de grandes difficultés, même dans les pays développés. Une enquête des inspecteurs sur la situation de l'enseignement primaire en Angleterre (Department of Education and Science, 1978) a montré que, dans environ un tiers des classes de tous âges, les enfants passent trop de temps à la pratique répétitive de processus qu'ils ont déjà maîtrisés.

La section du rapport publié en 1975 par le National Advisory Committee on Mathematical Education – NACOME (Etats-Unis d'Amérique) [Comité consultatif national sur l'enseignement des mathématiques] qui est consacrée aux techniques de calcul indique :

La politique actuelle d'élaboration des programmes scolaires est sous-tendue, entre autres, par un courant puissant qui essaie de remettre l'accent sur la technique de calcul en arithmétique et en algèbre. Cette tendance constitue sans aucun doute une réponse aux critiques publiques concernant la dégradation des résultats des épreuves de calcul ... L'enseignement scolaire traditionnel donnait beaucoup trop de place aux faits et aux techniques et on essayait beaucoup trop souvent de les enseigner par des méthodes fondées sur l'apprentissage par coeur et la répétition d'exercices. Ces méthodes n'aidaient nullement les enfants à comprendre, à retenir ou à appliquer des connaissances mathématiques spécifiques. De nombreux enseignants de l'ère des "maths nouvelles" ont cherché à améliorer les résultats pratiques en s'attachant à faire en sorte que les élèves comprennent mieux les structures qui sous-tendent les méthodes de calcul ... Nous avons de bonnes raisons de penser que, dans de nombreuses classes, les enseignants faisaient très mal le lien entre l'étude des structures et les algorithmes fonctionnant sur ces structures ... Les membres du NACOME déplorent que les élèves passent une grande partie de leur vie scolaire à acquérir une maîtrise suffisante des opérations arithmétiques fondamentales.

Ce regret n'est évidemment pas partagé par le grand public, les parents d'élèves, ni même par certains élèves. Toutes ces catégories de personnes pensent que si, à un âge donné, les enfants n'ont pas encore appris les techniques de calcul par l'exercice mécanique et la pratique, il faut continuer d'utiliser ces méthodes. Aux Etats-Unis d'Amérique, par exemple, un sondage d'opinion sur les priorités des mathématiques

scolaires pour les années 80 (effectué dans le cadre du projet du National Council of Teachers of Mathematics, 1981) intitulé : Priorités des mathématiques scolaires (PRISM) a montré que les personnes concernées par l'éducation étaient favorables à un accroissement du temps consacré aux exercices mécaniques et à la pratique (voir Figure 1), malgré les recherches qui semblent indiquer que ces activités risquent d'avoir un effet négatif. Il est à noter que les spécialistes de la formation des maîtres et les inspecteurs, soit deux groupes de personnes qui, du fait de leurs fonctions, sont très concernés par l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, étaient beaucoup moins favorables que les autres aux exercices mécaniques et à la pratique. Les mathématiciens professionnels venaient ensuite.



Légende : (extraits)
- DR Directeurs d'écoles primaires et secondaires.
- PT Présidents des associations de parents et d'enseignants.
- CS Présidents des commissions scolaires.
- MA Enseignants de mathématiques dans le supérieur.
- IN Inspecteurs pour l'enseignement des mathématiques.
- FO Spécialistes de la formation des maîtres en mathématique.

Figure 1. Pourcentages des personnes favorables à l'accroissement du temps consacré aux exercices mécaniques et à la pratique, pour les diverses branches des mathématiques.

La situation est très semblable dans beaucoup de pays en développement, où la pratique pédagogique favorise traditionnellement les méthodes fondées sur l'apprentissage par coeur. Deux extraits du Volume 2 des *Etudes sur l'enseignement des mathématiques* (1981) témoignent du caractère mondial de ce problème :

Bien que la révision et la réorganisation de cette discipline aient potentiellement approfondi la signification des mathématiques, l'enseignement magistral et l'habitude d'apprendre par coeur sont encore dominants. L'utilisation, à l'école primaire, de l'apprentissage par "activité centrée sur l'enfant" et de matériel à manipuler restent l'exception plutôt que la règle . . . Les examens nationaux jouent un rôle capital pour l'avenir des élèves . . . L'examen de mathématiques . . . porte sur des questions qui font principalement appel à des processus cognitifs très élémentaires. Ainsi l'examen lui-même encourage le recours à la mémoire et à l'apprentissage par coeur. [Etats arabes] (Unesco, 1981, pp. 160–161).

Les méthodes d'enseignement sont formelles et mettent l'accent sur les exercices mécaniques et la mémoire. Les programmes éloignent les enfants de leur milieu social et culturel en privilégiant le savoir livresque et les examens. [Antilles, mais écrit plus généralement à propos des pays en développement](Unesco, 1981 ; p. 51).

S'il n'y a pas d'accord entre les spécialistes de l'enseignement des mathématiques et le public (qui comprend les parents d'élèves) sur les objectifs de cet enseignement, un grave problème se pose au niveau de la formation des maîtres. Considérons, par exemple, le dilemme auquel se trouve confrontée une jeune institutrice américaine. Sa formation initiale l'a convaincue de l'importance que revêtent les travaux pratiques pour le développement de la pensée mathématique. Elle tient, en outre, à ce que les enfants élaborent leurs propres stratégies de recherche. Mais il lui sera très difficile de mettre ces idées en application parce que le directeur de son école lui demandera d'insister sur les exercices de routine, parce qu'elle devra utiliser les manuels choisis par la commission scolaire et parce que le système de contrôle des connaissances en vigueur dans son Etat mettra l'accent sur des objectifs auxquels elle ne souscrit pas. Ce genre de conflit se retrouve dans de très nombreux pays, développés ou en développement. Les enseignants sont influencés par les conceptions pédagogiques répandues dans leur environnement. Ashton a repris en 1977 l'enquête sur les objectifs des maîtres du primaire en Angleterre, qu'elle avait menée pour la première fois en 1969 (Simon et Willcocks, 1981). Il était demandé aux enseignants de classer par ordre d'importance une liste d'objectifs possibles pour l'enseignement primaire. L'importance attachée par les enseignants aux trois objectifs concernant les mathématiques témoigne, comme le montre le tableau 1, d'une évolution significative.

Tableau 1 : Classement, par les maîtres, des objectifs de l'enseignement primaire.

	Rang de classement	
	1969	1977
Maths pour la vie quotidienne	15	5
Calcul	20	2
Maths "modernes"	34	10

Les mathématiques, en général, ont donc progressé et le calcul en particulier de façon encore plus spectaculaire puisqu'il arrive au deuxième rang en 1977. Il est peu probable qu'au cours de cette période de huit ans, l'orientation de la formation initiale ou en cours d'emploi ait changé au Royaume-Uni au point d'expliquer l'accroissement de la place accordée au calcul, surtout par les méthodes d'exercice et de pratique mécaniques auxquelles de nombreux maîtres sont revenus entre les deux dates considérées.

La technologie et le programme de mathématiques du primaire

L'existence de calculatrices électroniques de poche peu coûteuses et facilement disponibles a modifié les besoins en connaissances arithmétiques pour la vie quotidienne. Les adultes des pays développés ont maintenant presque toujours recours à une calculatrice quand ils ne peuvent faire un calcul de tête. Lorsqu'ils atteignent onze ou douze ans, beaucoup d'enfants du Royaume-Uni, des Etats-Unis d'Amérique et de nombreux autres pays développés ont une calculatrice ou peuvent utiliser celle d'un autre membre de leur famille. Un petit nombre d'enfants, mais qui tend à augmenter, vivent maintenant dans une famille disposant d'un microordinateur. L'entrée en scène de ces instruments a eu relativement peu de répercussions sur le programme de mathématiques du primaire dans les pays développés. Dans beaucoup d'écoles primaires du Royaume-Uni, l'usage des calculatrices est interdit pendant les cours de mathématiques sauf, tout au plus, pour vérifier les résultats obtenus par d'autres méthodes. Dans ce pays, aucun projet publié sur les mathématiques du primaire ne tire parti des possibilités qu'offrent les calculatrices pour aider les enfants à mieux comprendre cette discipline. Aux Etats-Unis d'Amérique, le National Council of Teachers of Mathematics a formulé, en 1980, dans un document intitulé *An Agenda for Action : Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, les recommandations suivantes :

> Les programmes de mathématiques doivent pleinement tirer parti à tous les niveaux de l'enseignement, des possibilitiés des calculatrices et des ordinateurs . . . Il faut faire preuve d'imagination en utilisant les calculatrices et les ordinateurs pour explorer, découvrir et élaborer les concepts mathématiques et pas seulement pour vérifier les résultats des calculs ou effectuer des exercices de routine . . . Les écoles devraient insister sur la nécessité de faire en sorte que les matériels d'enseignement tirent véritablement et complètement parti du potentiel immense et très divers qu'offrent ces nouveaux instruments.

Cependant, dans le même rapport, les propositions concernant les calculatrices et les ordinateurs sont précédées du préambule suivant :

> Il est reconnu que, dans les petites classes, l'enseignement doit porter, pour une part appréciable, sur l'acquisition directe des concepts et des techniques numériques, sans recours aux calculatrices.

Il se peut que ce préambule assez prudent ait freiné l'élaboration de programmes prévoyant une utilisation des calculatrices pour aider les enfants à comprendre les mathématiques. Mais il a dû paraître probable à ses rédacteurs qu'un programme scolaire qui, dès les premiers stades,

utiliserait la calculatrice pour développer la pensée mathématique serait mal interprété par le grand public et les instituteurs et leur semblerait inacceptable. La majeure partie des instituteurs, des parents et du public continuent à croire que, dans le primaire, il faut essentiellement apprendre aux enfants à effectuer les quatre opérations en se servant d'un crayon et de papier. Quelle qu'en soit la raison, de nombreux instituteurs des pays développés considèrent comme une menace l'emploi des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

D'après l'enquête sur l'utilisation des calculatrices dans l'enseignement pré-universitaire aux Etats-Unis d'Amérique (Suydam, 1981) :

> Beaucoup de personnes sont surtout déçues par la rareté des matériels didactiques publiés, intégrant l'emploi des calculatrices dans l'ensemble de leurs programmes. La plupart de ces matériels proposent au contraire des modules supplémentaires. Il est rare que les calculatrices amènent à reconsidérer la méthodologie : la façon dont on enseigne les mathématiques reste la même, qu'elles soient utilisées ou non ... Il n'est pas fréquent non plus, même aujourd'hui, que le contenu de l'enseignement soit modifié, par adjonctions ou suppressions, parce que l'emploi des calculatrices est devenu possible.

Indépendamment de la nécessité d'intégrer l'emploi des calculatrices dans le programme de mathématiques des écoles primaires, la nécessité d'apprendre aux enfants à s'en servir efficacement devrait aussi entraîner des réaménagements du programme. Il a été constaté que beaucoup d'adultes s'inquiètent, au Royaume-Uni, quand ils voient sur leur calculatrice le résultat d'une opération telle que $10 \div 3$. Cela les conduit à abandonner le seul instrument qui pourrait les aider à améliorer leur aptitude pratique au calcul. L'interprétation et l'utilisation de l'affichage décimal des calculatrices devraient faire partie de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il en est de même des techniques permettant d'estimer l'ordre de grandeur d'un résultat attendu et de vérifier d'une autre façon le résultat donné par une calculatrice. Ces deux techniques sont nécessaires pour assurer une utilisation efficace des calculatrices. Il faut accorder plus d'importance aux moyens de résoudre les problèmes mathématiques de la vie quotidienne, et à l'utilisation des calculatrices dans ce but, en réduisant la place accordée auparavant aux techniques mécaniques de calcul. Il ne sera peut-être plus nécessaire, désormais, de savoir faire par écrit des opérations arithmétiques sur des nombres de plus de deux chiffres. Il faudra, en revanche, que chacun soit plus sûr de son aptitude au calcul mental.

Dans les pays en développement, il est beaucoup plus difficile de se procurer des calculatrices, mais au troisième Congrès international sur l'enseignement mathématique (Athen et Kunle, 1977), d'Ambrosio (Brésil) a exprimé l'opinion suivante :

On doit considérer l'utilisation des calculatrices et des ordinateurs à l'école comme une nécessité, et ce, aussi bien dans les pays en développement que dans les pays développés . . . L'enseignement scolaire doit en effet compenser, dans les premiers de ces pays, le manque d'expérience imputable à leur situation économique. En ce qui concerne l'influence des calculatrices sur l'enseignement des mathématiques, l'importance de l'aptitude au calcul en tant qu'activité purement mécanique doit être mise en question. Il faut faire le pari de consacrer plus de temps à un enseignement mathématique créatif dans les très petites classes.

Il est probable que les enseignants des pays en développement adopteront des attitudes analogues à celles de leurs collègues des pays développés, au sujet de l'empiètement des calculatrices sur le programme mathématique traditionnel du primaire. Si l'on veut que l'emploi des calculatrices dans des classes primaires soit efficace, ou que les élèves qui n'en disposent pas encore deviennent des adultes capables de les utiliser, il faudra que la formation initiale des maîtres s'attache, dans le monde entier, à faire en sorte que les étudiants qui la suivent adoptent des attitudes positives à l'égard de l'emploi des calculatrices à l'école, de même qu'à l'égard des modifications importantes qui doivent en résulter au niveau du programme d'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il faudra, en outre, que ces modifications du programme soient précédées d'un recyclage massif, destiné à aider les maîtres en exercice à comprendre les nécessités nouvelles et à adopter à leur égard une attitude positive.

On court le risque que la calculatrice, instrument personnel pratique et peu coûteux, qui peut être utilisé régulièrement une vie durant comme auxiliaire de calcul efficace, ne soit éclipsée, à mesure que les programmes scolaires seront réaménagés, par l'outil plus spectaculaire que constitue le micro-ordinateur. Pour l'instant, peu de classes primaires utilisent régulièrement un micro-ordinateur comme instrument d'apprentissage des mathématiques. Cependant le travail de développement progresse. Il faut donc, là encore, que les maîtres aient l'esprit assez ouvert pour accepter, lorsque cette technologie leur devient accessible, l'assistance des micro-ordinateurs pour l'enseignement des mathématiques. Ils ne devraient pas pour autant abandonner tout esprit critique : un grand nombre des premiers programmes élaborés étaient en effet destinés à renforcer, par une pratique répétitive, les exercices écrits traditionnels à l'école primaire qui tombent rapidement en désuétude à mesure que les calculatrices se répandent.

La montre digitale est un autre instrument de la technologie nouvelle, que beaucoup d'élèves du primaire possèdent déjà dans les pays développés. L'affichage digital fait appel à de nouvelles techniques d'interprétation, différentes de celles que met en jeu une montre analogique. Apprendre à "lire l'heure" exigera aussi un changement dans l'enseignement. Dans ce domaine aussi, le programme scolaire a souvent été lent à s'adapter et les maîtres ne sont pas toujours disposés

à étudier les avantages et les inconvénients de la nouvelle façon d'afficher l'heure pour le développement de la compréhension des mathématiques.

L'apprentissage des mathématiques

Le nouvel intérêt porté, ces dernières années, aux tests et à l'évaluation a permis de se rendre compte que, dans de nombreux pays développés, une proportion appréciable des élèves du primaire n'apprennent qu'un petit nombre des éléments de leur programme de mathématiques. Si celui-ci met l'accent sur la compréhension des concepts mathématiques, ce résultat final n'est pas toujours obtenu. S'il met l'accent sur l'acquisition des techniques manuelles de calcul par l'exercice et la pratique, les enfants élaborent souvent des méthodes erronées qui leur sont propres et qui ne sont certes pas celles que l'enseignement prévoyait. Par exemple, dans le calcul sur les fractions, beaucoup d'enfants de toutes les régions du monde donnent des réponses montrant qu'ils appliquent à mauvais escient des règles mal comprises. Le rapport de l'Assessment of Performance Unit, (1981, Angleterre, Pays de Galles et Irlande du Nord) décrit les réponses obtenues à des questions de calcul sur les fractions, dans le cadre de son enquête à grande échelle sur les enfants de onze ans. Le tableau 2 en donne quelques exemples.

Tableau 2. Addition de fractions : résultats des enfants britanniques de onze ans.

Question	% de réponses correctes	% répondent : Somme des numérateurs Plus grand numérateur		Somme des numérateurs Somme des dénominateurs	
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	58	$(= \frac{2}{4})$	4%	$(= \frac{2}{6})$	13%
$\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$	37	$(= \frac{3}{6})$	6%	$(= \frac{3}{9})$	21%
$\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$	60	(ces deux méthodes conduisaient à la même réponse)		$(= \frac{5}{10})$	13%

Le mode d'enseignement employé dans beaucoup d'écoles britanniques vise à favoriser la compréhension. Ainsi, la plupart des enfants ont l'habitude de découper des figures en morceaux et de les colorier dans la cadre d'activités conçues pour faire comprendre l'équivalence entre fractions et les opérations sur les fractions. Même dans ce cas, les résultats des épreuves de calcul montrent qu'une proportion appréciable des élèves n'est pas capable, à l'âge de onze ans, d'appliquer ces idées à des opérations abstraites sur des nombres fractionnaires.

Le Royaume-Uni n'est pas le seul pays où les opérations arithmétiques impliquant des fractions posent des problèmes aux élèves. Aux Etats-Unis, le National Assessment of Educational Progress (1979 *c*) a montré que la situation était assez semblable pour les élèves de 13 ans. (Tableau 3).

Tableau 3. Addition de fractions : résultats des enfants américains de 13 ans

Question	% de réponses correctes	Somme des numérateurs Somme des dénominateurs	
$4/12 + 3/12$	74	(non donné)	
$3/4 + 1/2$	35	$(= 4/6)$	34%
$1/2 + 1/3$	33	(non donné)	

En Ecosse, on a redonné à des élèves de 15 ans de la région centrale, en 1978, des problèmes d'arithmétique qui leur avaient déjà été posés quatre ans plus tôt. 53 % des élèves de 15 ans ont effectué correctement l'opération $2/3 + 5/6$, contre 38 % quatre ans plus tôt. (Scottish Council for Research in Education, 1978).

En Angleterre (Hart, 1981), on a examiné dans le cadre du projet CSMS l'aptitude des enfants de 12 à 15 ans à effectuer des calculs portant sur des fractions, et à résoudre des problèmes impliquant les mêmes opérations mais liés à des situations concrètes. C'est ainsi que lors de l'épreuve où il était demandé d'additionner $3/8 + 2/8$, le problème suivant était posé :

Chez un boulanger, on a utilisé trois huitièmes de la farine pour faire du pain et deux huitièmes pour faire des gâteaux. Quelle fraction de la farine a-t-on utilisée ?

On s'est aperçu que :

L'aptitude à effecteur des additions et des soustractions baisse quand l'enfant grandit. L'aptitude à résoudre les problèmes *ne diminue pas,* de sorte qu'on est conduit à supposer qu'ils sont résolus sans recourir aux algorithmes de calcul. En fait, de nombreux enfants ne paraissent pas relier les algorithmes à la résolution du problème et emploient leurs propres méthodes.

Les résultats convergents des recherches de ce type amènent à se demander s'il convient d'inclure dans le programme de mathématiques du primaire, les techniques nécessaires pour manipuler des abstractions comme les fractions équivalentes. Il paraît certain que ces notions sont fort mal comprises par un très grand nombre d'enfants. Shuard (1982) a procédé à une comparaison analogue des résultats de tests effectués à une large échelle dans les pays développés anglophones, qui portaient sur le principe – central pour la compréhension des nombres par l'enfant – de la numération décimale. Elle constata que les erreurs étaient

très similaires. En 1974, par exemple, seulement 48 % des enfants anglophones âgés de 10 ans pouvaient répondre à la question suivante :

Le compteur d'une voiture indique : 0 : 2 : 6 : 9 : 9 : miles. Qu'indiquera-t-il quand la voiture aura parcouru un mile de plus ? : : : : : :

Il convient toutefois de noter qu'une question très semblable posée par le Concepts in Secondary Science of Mathematics Project (CSMS) a fourni un pourcentage de réponses exactes de 68 % à 12 ans, et de 88 % à 15 ans (Hart, 1981). Il est encourageant de constater qu'une très forte proportion des jeunes Britanniques savent appliquer jusqu'aux milliers le principe de la numération décimale lorsqu'ils quittent l'école, mais beaucoup d'instituteurs seraient très surpris d'apprendre combien d'enfants de 11 ans ne peuvent répondre à cette question et n'ont donc pas encore assimilé la numération décimale qui est la base de tout calcul sur les nombres entiers.

On ne dispose pas de données comparables obtenues dans des pays en développement, mais une description par Wilson (1978) de la situation aux Caraïbes en 1970, avant le début du Projet relatif à l'enseignement des mathématiques aux Caraïbes (CMP), semble montrer qu'elle n'est sans doute pas meilleure dans certains de ces pays. A cette date, par exemple, la proportion d'enfants de 12 à 14 ans capables d'effectuer correctement l'opération $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ ne dépassait pas 18 % dans les territoires considérés.

Une enquête effectuée par Vandewiele et d'Hondt (1978) sur les élèves du secondaire à Dakar paraît indiquer que ces adolescents se heurtent à des difficultés semblables en arithmétique. Dans les pays en développement, on met souvent ces problèmes sur le compte du système éducatif, qui souffre d'un manque énorme de maîtres qualifiés, de la surcharge des classes et d'une grave pénurie de manuels et d'autres ressources. Tout cela est incontestable, mais il faudrait aussi se demander si le programme et les méthodes d'enseignement sont appropriés puisque les difficultés conceptuelles évoquées plus haut ne sont pas propres à ces pays. Il est permis d'espérer que les résultats de l'étude sur les mathématiques effectuée en 1980 par l'International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) [Association internationale pour l'évaluation du rendement scolaire] fourniront des indications sur la question de l'adéquation des programmes de mathématiques traditionnels du primaire dans les pays considérés. Toutefois, le plus jeune des groupes d'âge étudiés par l'IEA était celui des jeunes de 13 ans, de sorte qu'il n'a pas été possible d'inclure dans l'enquête beaucoup de questions portant sur les notions de mathématiques habituellement enseignées à l'école primaire.

Un travail de développement important a été effectué, mais il est nécessaire de mener d'autres études sur le résultat de l'enseignement des mathématiques dans le primaire, afin de mieux évaluer dans quelle mesure le contenu et les méthodes conviennent aux élèves. Ces études

doivent être fondées sur les réalités locales. Par exemple, une grande partie des mathématiques enseignées aux très jeunes enfants au Royaume-Uni repose sur les comparaisons : "plus que" et "moins que", "plus long que" et "plus court que", alors que cette structure n'existe pas dans certaines langues de la Papouasie-Nouvelle-Guinée (et qu'elle n'est sans doute pas présente non plus dans la pensée des enfants). Bishop (1979) cite le commentaire d'un interprète local qui essayait de traduire un test de mathématiques :

Il n'y a pas de construction *comparative*. On ne peut pas dire : A court plus vite qui B, mais seulement : A court vite, B court lentement.

Cependant, les travaux accomplis en Papouasie-Nouvelle-Guinée ont montré que les différences culturelles et linguistiques peuvent constituer des facteurs positifs aussi bien que négatifs pour l'apprentissage des mathématiques. Bishop a par exemple découvert chez les élèves de Papouasie-Nouvelle-Guinée une nette supériorité par rapport aux élèves européens dans le domaine de la mémoire visuelle. D'autres cultures des pays en développement peuvent offrir des éléments favorables à l'enseignement des mathématiques dans le primaire. Gay et Cole (1967) ont par exemple formulé, dans leur étude des Kpelle [au Libéria], les remarques suivantes :

Dans la culture des Kpelle, le système d'unités de mesure du riz sec constitue une base parfaite pour l'analyse de la notion de mesure. Ces unités, liées entre elles, forment un système très analogue à notre système britannique. Il est possible d'initier les élèves aux problèmes de mesure sans se référer à la culture traditionnelle, mais notre expérience montre qu'avec un enseignement de ce genre, les élèves ne comprendront pas les systèmes de mesure et les utiliseront mal. Au contraire, si les unités et les méthodes de mesure occidentales sont comparées au système que les enfants connaissent, la classe découvrira l'intérêt d'un système de mesure coordonné et normalisé, et les concepts occidentaux deviendront intelligibles.

Cette étude a été faite avant que soit lancé le mouvement mondial de conversion au système métrique, mais les mêmes principes continuent à s'appliquer.

Les attitudes vis-à-vis des mathématiques

Quel que soit le degré de succès ou d'échec de l'apprentissage des concepts et techniques mathématiques dans les classes primaires, on apprend certainement bien d'autres choses pendant les leçons de mathématiques. On y acquiert, en particulier, une certaine attitude vis-à-vis des mathématiques et une certaine conception de cette discipline. L'intérêt porté à l'étude de ce type d'apprentissage non planifié s'est

récemment accru.

Au Royaume-Uni, la plupart des élèves du primaire considèrent que les mathématiques sont *utiles*. L'Assessment of Performance Unit (1980) a inclus dans ses enquêtes sur les enfants de 11 ans des questions portant sur les attitudes, avec les résultats suivants :

La plupart des enfants jugent fondées les déclarations de principe relatives à l'utilité des mathématiques.

La note d'utilité moyenne est très élevée. La note accordée pouvant aller de 0 à 24, la moyenne est de 20,4 (écart-type : 3,2), alors qu'elle était de 20,1 (écart-type : 3,7) l'année précédente.

L'opinion des élèves sur l'utilité des mathématiques est indépendante du degré de difficulté que présente pour eux cette matière.

Les élèves de Dakar, où l'enseignement s'inspire du français, ont des vues très semblables. Dans le cadre d'une enquête sur les élèves du secondaire (Vandewiele et d'Hondt, 1978), 60 % de ces derniers ont exprimé un goût marqué pour les mathématiques, en le justifiant ainsi : "les mathématiques sont utiles, les mathématiques serviront plus tard, et elles sont utiles au pays".

Les élèves peuvent considérer les mathématiques comme utiles, soit pour la société, soit pour eux-mêmes dans leurs études ou leur futur travail. Ils peuvent aussi les considérer comme un moyen de sélection. Ce dernier aspect n'échappe évidemment pas aux jeunes Britanniques, comme le montre une enquête de Preece et Sturgeon (1981) sur les élèves de 13 ans. Un des élèves qu'ils ont interrogés a écrit : "les leçons sont parfois ennuyeuses et déroutantes mais elles aident à obtenir un emploi meilleur et bien payé".

Dans certains sytèmes, l'enseignement peut entraîner une perception analogue mais encore plus marquée de l'utilité des mathématiques. Gerdes (1981, p. 471) raconte, à propos d'un Séminaire national sur l'enseignement des mathématiques au Mozambique :

Pour un nombre appréciable de participants, ce fut un "choc" de constater que les mathématiques ne tombent pas du ciel, qu'elles ne sont pas éternelles, et qu'on ne les enseigne pas pour disposer d'un mécanisme de sélection des élèves, mais qu'elles ont des applications.

L'attitude des élèves à l'égard des mathématiques a d'autres apsects : leur perception de la difficulté de cette matière, et l'attrait qu'ils éprouvent pour elle.

L'"allergie aux maths" est, dans les pays développés comme dans ceux en développement, un phénomène inquiétant. Aux Etats-Unis d'Amériqu et au Royaume-Uni, beaucoup d'adultes se montrent angoissés

quand on leur demande d'effectuer un calcul, même assez simple. Dans une enquête récente sur l'utilisation des mathématiques dans la vie quotidienne des adultes en Angleterre, Sewell (1982) raconte :

> . . . beaucoup d'entre eux ne tenaient pas à être interrogés à ce sujet. J'ai essayé des approches directes et indirectes, j'ai essayé de remplacer le mot "mathématiques" par "arithmétique" ou "utilisation quotidienne des chiffres", mais il était claire que c'était parce qu'il s'agissait de mathématiques que les gens se dérobaient. Une chorale d'église a refusé en bloc, ainsi que certains portiers d'hôpitaux . . . Je fus aussi quelque peu surpris de constater que plusieurs de mes connaissances se montrèrent inflexibles. De toute évidence, les intéressés craignaient que je leur remette en mémoire certains souvenirs douloureux. Ceux qui attribuaient leur peur des mathématiques à de mauvais souvenirs de l'école . . . évoquaient l'attitude de mépris adoptée par les maîtres, qui ne semblaient guère s'intéresser aux élèves en difficulté . . . D'autres avaient été terrorisés par l'exigence d'exactitude et de rapidité, qu'ils considéraient comme les caractéristiques intrinsèques de l'apprentissage des mathématiques, ainsi que par le fait qu'il est demandé, traditionnellement, d'exposer de façon claire la démarche suivie pour résoudre un problème. Ils se sont souvenus de leurs angoisses d'autrefois, quand ils avaient trouvé intuitivement la réponse juste et qu'ils étaient invités à expliciter par écrit une méthode de solution qu'ils n'avaient pas utilisée. Souvent, les méthodes employées étaient très simples et assez maladroites. Il apparaît qu'une grande partie de l'arithmétique enseignée à l'école primaire a été oubliée ou que son intérêt n'a pas été perçu.

Les élèves nigérians font état d'attitudes semblables. Dans un questionnaire conçu par Ale (1981), les élèves du secondaire ont cité, parmi leurs principales sources de difficultés dans l'étude des mathématiques, la crainte du professeur et de cette matière, et l'insuffisance de leurs connaissances de base, due au fait qu'ils avaient mal assimilé les notions fondamentales, ou à l'incompétence de leurs maîtres. La grande majorité de ces adolescents pensait que les mathématiques sont réservées aux élèves doués et que, si on ne l'est pas, il est impossible de les comprendre, même si on s'y évertue. En outre, beaucoup d'entre eux croyaient que les mathématiques et la science sont étrangères à la culture africaine.

Les élèves acquièrent non seulement une attitude vis-à-vis des mathématiques, mais aussi une conception de leur nature. L'étude la plus connue de la conception surprenante des mathématiques qu'ont les enfants est celle faite par Erlwanger (1973) des idées de Benny et d'autres élèves qui suivaient un Programme d'enseignement "à la carte" (Individually Prescribed Instruction – IPI) aux Etats-Unis d'Amérique. Benny, en sixième année, réussissait en mathématiques, il avançait dans son programme individuel plus vite que la plupart de ses camarades de classe et montrait qu'il maîtrisait son travail en obtenant régulièrement plus de 80/100 à ses tests. Cependant, dans une série d'entretiens, il révéla qu'il pensait que les mathématiques étaient constituées de centaines de règles différentes pour différents types de problèmes et

que toutes ces règles avaient été inventées. Il avait découvert que les réponses pouvaient souvent être exprimées sous des formes différentes ; $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ "peut, par exemple, s'écrire $\frac{4}{4}$ ou 1". Une des formes seulement étant permise par le corrigé, Benny croyait que ses réponses fausses ne l'étaient pas, mais étaient simplement écrites d'une manière différente. Les règles fonctionnaient magiquement parce que les réponses obtenues en les appliquant pouvaient être exprimées de façons différentes, "que nous croyons différentes, mais qui, en réalité, sont les mêmes". Ce n'est pas uniquement dans le cadre de ce programme ou aux Etats-Unis, d'Amérique, que de nombreux enfants semblent considérer les mathématiques comme un jeu régi par des règles arbitraires et incompréhensibles. Les enfants qui se représentent ainsi les mathématiques s'en remettent totalement au professeur ou au corrigé pour déterminer si leur solution est correcte. Sewell rapporte en ces termes un entretien qu'il a eu avec une diplômée d'anglais à propos des souvenirs qu'elle gardait des leçons de mathématiques :

> Elle savait qu'elle avait tout appris par coeur sans rien y comprendre . . . "c'était une énorme escroquerie", disait-elle. Sa compréhension des nombres ne s'est améliorée que récemment, parce qu'ils tiennent une grande place dans son travail.

La solution de problèmes

En 1980, le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (Etats-Unis d'Amérique) a publié son *Agenda for Action : Recommandations for School Mathematics of the 1980s*' La première recommandation est la suivante : "l'enseignement des mathématiques à l'école devra, dans les années 1980, s'articuler autour de la solution de problèmes". Cette recommandation est destinée à toutes les classes, y compris celles du primaire. Les enseignants sont instamment invités à créer en classe une ambiance propice à la solution de problèmes. Ils doivent inciter les élèves à poser des questions, expérimenter, estimer, explorer et suggérer des explications. Le programme de mathématiques doit fournir à l'élève des occasions d'aborder des problèmes présentés sous des formes plus diverses que dans le manuel.

Cette recommandation a été formulée à la suite de tests organisés aux Etats-Unis d'Amérique en 1978 par le National Assessment of Educational Progress (NAEP, 1979*a*). Les résultats de ces tests, qui portaient sur des problèmes non routiniers, avaient été médiocres. Alors que les niveaux d'aptitude au calcul sur les nombres entiers sont restés assez stables pour les enfants de 9 et 13 ans entre 1973 et 1978 (époque du mouvement "Retour aux bases"), il n'en était pas de même pour la solution de problèmes, et le comité d'experts qui a commenté les

résultats (NAEP, 1979*b*) était

. . . très préoccupé par la faible performance dans d'ensemble en ce qui concerne la solution de problèmes (applications) et par la baisse de niveau constatée à cet égard depuis 1973.

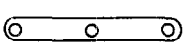
L'expression "solution de problèmes" peut avoir différentes significations. Il peut s'agir d'une question simple, du type de celles des manuels, où le seul problème consiste à découvrir, à partir de l'énoncé, quel algorithme il convient d'utiliser. Elle peut être placée dans le contexte d'un "monde réel" plutôt abstrait, par exemple quand les élèves calculent mathématiquement les probabilités au jeu de dés. Elle peut aussi indiquer que l'enseignement porte sur des problèmes non routiniers et qu'on cherche à développer les aptitudes heuristiques des élèves. Enfin, elle peut signifier que les mathématiques sont appliquées à la solution de problèmes qui se posent effectivement dans le milieu où vivent les enfants, que ce soit, dans un pays développé, l'organisation d'une excursion scolaire ou, dans un pays en développement, la modernisation de l'agriculture d'un village.

Carpenter a formulé, au sujet des résultats de l'évaluation nationale faite en 1978 aux Etats-Unis d'Amérique (NAEP, 1979*b*), les observations suivantes :

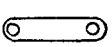
Les résultats des enfants sont assez bons pour les problèmes verbaux simples, à étape unique, comparables à ceux des manuels. En revanche, ils ont du mal à résoudre les problèmes plus complexes ou différant, même légèrement, de ceux des manuels. Il est claire que beaucoup d'élèves ne perçoivent pas clairement les implications de leurs énoncés.

En 1978, par exemple, 3 % seulement des élèves américains de 9 ans et 24 % des élèves de 13 ans étaient capables de résoudre le problème suivant (qui semblerait pourtant en relation directe avec le type de jouets dont disposent les enfants dans les pays développés) :

Le jeu de construction de Mike contient :
60 pièces longues

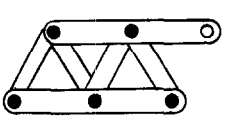


60 pièces courtes



et 60 écrous avec leurs boulons

Combien de montages comme celui-ci peut-il fabriquer ?



Aux Etats-Unis d'Amérique comme ailleurs, beaucoup d'instituteurs ont de l'enseignement des mathématiques une conception qui ne les conduit pas à mettre l'accent sur les problèmes non routiniers et à développer l'aptitude à découvrir. Au Royaume Uni, au début des années 1970, notamment dans les écoles participant au projet Nuffield de mathématiques, une large place était accordée au développement de l'aptitude des élèves à explorer et à découvrir par eux-mêmes les notions mathématiques. Cette approche est actuellement plutôt moins répandue dans les écoles primaires britanniques qu'il y a dix ans, bien que les auteurs qui traitent des mathématiques à l'école primaire continuent à la recommander vigoureusement. Le document des HMI [Corps des inspecteurs scolaires] (Department of Education and Science, 1979) intitulé *Mathematics : 5 to 11* inclut, par exemple, dans la liste des objectifs généraux des mathématiques à l'école primaire :

La prise de conscience des aspects créatifs de cette matière et de son attrait esthétique.

La capacité de raisonner clairement et logiquement en mathématiques, avec assurance et en faisant preuve d'indépendance et de souplesse d'esprit.

La compréhension des mathématiques par un processus de recherche et d'expérimentation.

La connaissance des applications des mathématiques dans le monde extérieur à la classe. Les enfants devraient être amenés à se rendre compte que les mathématiques les aideront souvent à résoudre les problèmes qu'ils rencontreront dans leur vie quotidienne ou à mieux comprendre un grand nombre des choses qu'ils voient.

Toutefois, aider les élèves à apprendre les mathématiques grâce à un processus d'expérimentation et d'exploration concretes ne sevient pas à développer leur aptitude à résoudre les problèmes mathématiques de la vie quotidienne, ou même des problèmes non routiniers relevant du monde des mathématiques elles-mêmes. Jeffery (1978) décrit les difficultés rencontrées par un groupe d'élèves de 10 à 11 ans (au Royaume-Uni) un problème ouvert faisant intervenir des tiges colorées de longueur inégale. Les élèves étaient invités à construire des "trains" monocolorés et à trouver la longueur commune aux deux trains les plus courts pouvant être réalisés. Par exemple, avec des tiges de 4 cm d'une certaine couleur et des tiges de 3 cm d'une autre couleur, les trains les plus courts de même longueur mesurent 12 centimètres. Cette situation fournit de nombreuses occasions de *faire des conjectures*, c'est-à-dire de développer une des aptitudes mathématiques indispensable pour résoudre des problèmes. Le programme de mathématiques peut être expressément conçu de manière à initier les élèves du primaire à un certain nombre de processus heuristiques analogues qui doivent

être utilisés pour résoudre des problèmes. Parmi ces processus, figurent notamment les suivants :

Représenter une situation par un graphique ou un diagramme, ou en *employant des objects concrets* comme des cubes ou des tiges afin de distinguer les mathématiques sous-jacentes ;

Remarquer les *configurations de nombres,* comme celle qui apparaît dans la suite des carrés 1, 4, 9, 16, . . . Compléter ces configurations et analyser leur mode de construction ;

Faire des conjectures, comme dans le problème des "trains" cité plus haut, peut-être en formulant l'hypothèse que les trains les plus courts ont une longueur égale au produit de celle des tiges utilisées (ici, $12 = 3 \times 4$) ;

Expliquer pourquoi une conjecture est juste ou, au contraire, *la réfuter par un contre-exemple,* en remarquant, en l'occurence, que les trains les plus courts qui peuvent être construits avec des tiges de 4 cm et de 6 cm ont 12 cm de long et non 24 cm (4×6), comme on aurait pu s'y attendre ;

Quelquefois, une exploration patiente par la *méthode des essais et des erreurs* est nécessaire – pour trouver, par exemple, si dans le problème des ponts de Königsberg, on peut faire le tour de la ville en traversant chaque pont une seule fois ;

Il est important que les élèves du primaire acquièrent la capacité de *discuter les problèmes qui leur sont posés* d'explorer ainsi des idées de solution et *d'exposer oralement* (et finalement par écrit) la démarche suivie en vue de les résoudre.

Des projets comme *Skills and Procedures of Mathematical Problem Solving* [Techniques et méthodes de résolution des problèmes mathématiques] (Burton, 1980) ont commencé à démontrer que les enfants de 9 à 13 ans peuvent se familiariser avec ces processus heuristiques et les employer. Aux Etats-Unis d'Amérique, le recueil annuel du NCTM pour l'année 1980, *Problem Solving in School Mathematics* contient beaucoup d'éléments utiles pour les instituteurs. Les difficultés au niveau de la formation des maîtres sont toutefois énormes, même dans les pays développés. La situation décrite par Becker, dans le résumé qu'il a soumis au quatrième Congrès international sur l'enseignement mathématique (ICME IV, 1980), n'a rien d'exceptionnel :

> . . . On peut citer les difficultés suivantes : (i) beaucoup de maîtres n'ont pas l'impression qu'ils sont capables de résoudre eux-mêmes des problèmes ; (ii) beaucoup de maîtres n'ont pas le sentiment que les techniques de résolution des problèmes peuvent ou devraient être enseignées à l'école primaire.

Dans de nombreux pays, où une longue tradition interdit d'interrompre ou d'interroger le maître, et où les classes sont surchargées, la transformation des mathématiques, au niveau primaire, en un processus

actif de questionnement et d'exploration sera encore plus difficile.

Comme Broomes (Unesco, 1981, p. 57) le note :

> . . . la façon dont les mathématiques sont enseignées et les matériels utilisés à cette fin ont tendance à détourner des mathématiques la pensée consciente de certaines personnes dont dépendent le bien-être et la prospérité de la collectivité : le cultivateur, l'ouvrier agricole, la femme au foyer.
> . . . même si le contenu utilisé pour donner une réalité concrète aux concepts étudiés . . . n'est pas un élément des connaissances mathématiques en tant que telles, sa transmission établira des liens entre les mathématiques et le contexte dans lequel elles sont utilisées.

L'aptitude à utiliser les mathématiques pour les tâches de la vie quotidienne et le développement de l'économie est primordiale dans les pays en développement. Cet objectif n'a pas toujours été nettement atteint dans les pays développés. Il faut trouver des moyens d'encourager les maîtres à tirer parti des liens qui existent entre les mathématiques enseignées à l'école primaire et leurs applications directes dans la vie des élèves, de leurs parents et de leur collectivité. Dans certains pays, des idées comme celle de Gerdes (1981, p. 475) contribueront peut-être à faire en sorte que les maîtres du primaire comprennent cette exigence et à s'assurer de leur concours :

> Au Mozambique, de nombreux éléments du programme d'enseignement des mathématiques reflètent un niveau de développement technologique qui ne correspond pas à celui des forces productives du pays ; il faut, cependant, maintenir ces éléments au programme afin de vaincre le sous-développement. Comment peut-on relier efficacement les mathématiques scolaires à l'éducation et à l'expérience pré-scolaires ? . . . L'auteur pense que la réponse doit être recherchée, à ce stade, dans l'établissement, au cours des premières phases de l'enseignement de cette matière, d'un lien très étroit avec ses applications dans l'environnement des élèves, par exemple les problèmes de production dans les nouvelles coopératives et les villages communautaires.

Langage et apprentissage

L'apprentissage des mathématiques se heurte à de grandes difficultés linguistiques, même dans les pays où les enfants ont la chance d'utiliser, pendant toute leur scolarité, leur langue maternelle pour les étudier. Quand ils entrent à l'école, beaucoup d'enfants n'ont pas une maîtrise suffisante du langage pour participer à des conversations à contenu mathématique. L'école doit donc s'attacher à développer leur vocabulaire et les concepts. Il convient d'insister, en classe, sur l'utilisation d'expressions telles que "le *premier* de la famille", "l'enfant *le plus âgé*" et "la boîte *lourde*". Ainsi, à mesure que l'enfant maîtrisera mieux

le langage, il commencera à comprendre les idées mathématiques que celui-ci exprime.

Un peu plus tard, on exprimera une idée mathématique unique en recourant à des expressions différentes, telles que (en français) : "*le deuxième nombre après 4*", "2 *et* 4 *égale*", "2 *ajouté à* 4", "*la somme de* 2 *et* 4", "2 *de plus que* 4". En langage mathématique, toutes ces formes verbales se traduisent uniformément par 2 + 4. Il n'est pas surprenant que des enfants qui n'ont pas suffisamment l'habitude de *parler* de mathématiques, éprouvent par la suite des difficultés à aborder des problèmes qui peuvent être présentés verbalement comme indiqué ci-dessus, de diverses façons. La maîtrise préalable du langage parlé est également essentielle pour relier ce qu'ils apprennent aux situations de leur vie quotidienne où les mathématiques sont utilisées. La difficulté principale à laquelle se heurtent les enfants est d'ordre linguistique. L'opération 2 + 4 est simple, mais si le concept et le symbolisme de l'addition ne sont pas liés aux diverses expressions employées par le maître et le manuel, l'enfant ne pourra pas de lui-même parvenir à 2 + 4.

Quand on enseigne la lecture, le premier but est d'aider l'enfant à établir une correspondance entre, d'une part, les symboles écrits qu'il voit et, de l'autre, le son et le sens du langage oral, qu'il comprend déjà. Quand il s'agit d'enseigner, de lire et d'écrire les mathématiques, les difficultés sont encore plus grandes. Cela tient au fait que le langage oral correspondant n'est pas toujours assimilé quand le langage écrit ou les symboles mathématiques sont introduits, et au fait qu'un seul ensemble de symboles mathématiques peut correspondre à des formulations orales extrêmement diverses.

Au Royaume-Uni et, dans une certaine mesure, dans d'autres pays développés, l'utilisation de plans individualisés d'apprentissage des mathématiques s'est récemment étendue. Ces plans exigent que l'enfant ait déjà beaucoup développé son aptitude à suivre des explications écrites et à s'initier aux concepts mathématiques par abstraction et par généralisation, à partir d'activités qu'il est invité à entreprendre conformément à des instructions écrites. Dans les classes où ils travaillent individuellement, les élèves n'ont peut-être pas assez d'occasions de discuter oralement des mathématiques avec leurs camarades ou leur maître. Dans ces cas-là, le langage écrit peut prendre une importance à laquelle les enfants ne sont pas encore préparés. L'extension de ce mode d'enseignement a attiré l'attention sur les problèmes posés par l'emploi des documents écrits en mathématiques.

Un récent ouvrage du Groupe Langage et Lecture en Mathématiques du BSPLM *(British Society for the Psychology of Learning Mathematics)* (Rothery, 1980) a mis en évidence les différents usages auxquels le texte mathématique peut servir et les problèmes de vocabulaire, de syntaxe et de symbolisme auxquels l'élève peut être confronté quand il lit. On peut

utiliser les textes à des usages très divers. Ils exposent les concepts et les techniques mathématiques, ils donnent à l'élève des instructions pour écrire, calculer ou entreprendre une activité pratique, ils offrent des exemples et des exercices. Quand on utilise les manuels de façon traditionnelle, le maître expose les notions mathématiques pendant la leçon et il suffit que l'enfant comprenne la dernière de ces formes d'écriture. Même quand on utilise les textes de cette façon, beaucoup d'enfants arrivent seulement à lire les calculs entièrement exprimés par des symboles. Ils semblent incapables de se représenter la situation décrite dans un problème présenté verbalement. Quand ils lisent, ils se contentent donc surtout de relever les nombres figurant dans le texte et se servent des "mots-clés" pour déterminer l'opération à effectuer sur les nombres qu'ils ont relevés. Quand on utilise des textes comme source principale d'apprentissage individuel, les enfants sont confrontés à une plus grande variété de problèmes de lecture. Mais cette pratique accrue en mathématiques ne conduit pas nécessairement à une amélioration de la technique de lecture, sauf si celle-ci constitue le mode d'apprentissage autour duquel l'enseignement s'articule expressément.

Le vocabulaire d'un manuel de mathématiques contient aussi des écueils pour l'enfant distrait. Certains mots ne sont employés qu'en mathématiques. Par exemple, *parallélogramme* et *hypothénuse* (Rothery, 1980) :

> Ces mots ne se rencontrent que dans un contexte mathématique et on doit apprendre leur signification dans un livre de mathématiques ou grâce au maître Quand il a oublié un mot, l'élève a du mal à en retrouver le sens sans aide.. En outre, ces termes techniques sont souvent essentiels pour la signification, s'ils ne sont pas compris, le passage où ils figurent risque de rester totalement inintelligible.

D'autre part, de nombreux mots ont en mathématiques des sens différents de ceux qu'ils ont ordinairement. Par exemple, en français, la difficulté d'enseigner le concept de "différence" à de jeunes enfants est aggravée par le fait que ce terme s'applique en mathématiques à un des aspects de la notion de soustraction, alors que l'élève l'aura précédemment employé dans la vie quotidienne pour indiquer une des diverses sortes de dissemblances, qui sont loin de se limiter aux différences entre nombres. Le groupe du BSPLM a actuellement entrepris d'étudier comment les auteurs peuvent élaborer des manuels plus lisibles pour les élèves, ainsi que les moyens d'améliorer chez ces derniers l'aptitude à lire les mathématiques et d'aider les maîtres à utiliser plus efficacement les manuels comme source d'apprentissage.

Dans les pays où les enfants apprennent les mathématiques à l'école primaire dans une langue autre que leur langue maternelle, dans ceux où la langue employée change quand les élèves avancent dans le système et dans les cas où la langue maternelle ne se prête pas d'emblée à la formulation de certaines notions mathématiques, les difficultés sont

encore plus grandes. Le rapport d'un colloque sur les interactions entre la linguistique et l'enseignement des mathématiques, parrainé par l'Unesco, le Centre for Educational Development Overseas (CEDO) (Royaume-Uni) et la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM), à Nairobi en 1974, contient à cet égard des informations très utiles.

L'adaptation aux mathématiques d'une citation de Dart sur l'enseignement des sciences (*Physics Today*, juin 1972) peut être considérée comme le thème principal de ce colloque :

> Les premiers stades de l'éducation d'un enfant, et les plus importants ... commençent avec le jeu libre d'imitation ... C'est le plus grand et le meilleur système scolaire du monde. Il possède plus d'élèves et plus d'enseignants que tout autre. Il bénéficie d'un meilleur rapport maître/élèves, il compte plus d'heures de classe et il est de beaucoup plus efficace que tout autre système scolaire connu ... Quand le premier enseignement scolaire vient s'ajouter à cet apprentissage informel, la situation n'est pas du tout la même suivant qu'ils sont cohérents ou divergents. Ce problème de cohérence revêt une importance encore plus grande quand un système de pensée étranger doit être enseigné au moyen d'un programme scolaire importé, comme c'est le cas pour la science dans un si grand nombre de pays du monde non occidental et même dans certaines parties des Etats-Unis d'Amérique.

Le rapport du colloque cite de nombreux cas où la langue maternelle pose des problèmes de choix d'un vocabulaire adapté à la formulation des idées mathématiques, même s'il existe des formes linguistiques permettant d'exprimer les concepts. Par exemple, beaucoup de langues africaines sont riches en mots désignant divers ensembles. Cependant, en igbo, langue employée dans certaines régions du Nigéria :

> Le mot *otu*, qui signifie littéralement une bande (par exemple, de voleurs ; un groupe de vieillards, de jeunes filles, etc.) ne s'emploie normalement que pour désigner des êtres humains ayant quelque chose en commun. C'est ce mot ... que les enseignants de mathématiques modernes emploient à l'école primaire pour désigner les "ensembles". Cet usage est un peu trompeur ou déroutant au début, pour les enfants, parce qu'il leur donne à penser que les éléments des ensembles ne peuvent être que des êtres humains.

En revanche, les langues maternelles peuvent présenter des avantages à exploiter sur le plan mathématique, à condition qu'on puisse les identifier, et qu'on élabore le programme scolaire de façon à en tirer parti. Ainsi :

> L'anglais est une langue moins précise que le kpelle. Il emploie le même mot *or* parfois dans le sens de "n'importe lequel des deux", parfois dans celui de "l'un des

deux, mais pas les deux", et parfois dans celui de "autrement dit". Cette ambiguïté est absente en kpelle. C'est pourquoi on a été amené à supposer que les Kpelles réussiraient probablement mieux que les Américains un test d'aptitude à l'apprentissage de règles logiques, hypothèse qui a été démontrée et confirmée par la suite.

Quand la langue d'enseignement est, dès le début de la scolarité primaire, une deuxième langue, il est plus difficile d'exposer des notions mathématiques dans un langage oral informel avant d'aborder le langage écrit et les symboles. Il est essentiel que l'enseignement de cette langue soit défini de concert avec celui des mathématiques, de manière qu'on puisse disposer des ressources linguistiques voulues pour exprimer les concepts mathématiques à mesure qu'ils s'élaborent :

Il faut enseigner les concepts et les structures linguistiques, et, pour qu'elles aient un sens, il faut les enseigner en s'inspirant des réalités de la vie quotidienne au foyer. Cela implique que le maître ne doit pas enseigner les mathématiques en écrivant des symboles au tableau, en les réarrangeant, en obtenant des "réponses", en demandant à la classe de noter la démarche suivie et de l'apprendre par coeur; mais il doit être formé aux techniques visant à faire participer les élèves à des activités, des recherches et des discussions soigneusement structurées qui leur permettront de comprendre le contenu du cours. Bref, l'enseignement des mathématiques dans une deuxième langue doit, en fait, adopter les principes qui régissent les méthodes d'enseignement d'une deuxième langue en tant que langue.

Les principes à appliquer pour donner un sens à l'enseignement des mathématiques aux jeunes enfants sont les mêmes, que l'étude de cette matière se fasse dans la langue maternelle ou dans une deuxième langue. Ils sont très clairement exprimés dans la citation du rapport du colloque de Nairobi figurant plus haut, et l'apprentissage des mathématiques serait plus efficace si beaucoup d'enseignants qui travaillent dans des conditions plus favorables les comprenaient mieux.

Différences entre garçons et filles

Les différences entre garçons et filles en ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques ont fait l'objet de nombreux travaux aux Etats-Unis d'Amérique et de certaines recherches dans d'autres pays développés. Garçons et filles adoptent déjà dans les classes primaires des attitudes différentes vis-à-vis de cette matière et de son étude. Les garçons s'attendent plus souvent que les filles à se servir des mathématiques dans leur futur travail. Les filles commencent déjà à manifester le manque de confiance qui sera si néfaste à leur apprentissage des mathématiques dans le secondaire. Un test sur les attitudes des enfants de 11

ans effectué par l'Assessment of Performance Unit (APU) (1981) a, par exemple, montré que :

> Davantage de garçons que de filles estiment qu'en général ils assimilent vite une nouvelle notion mathématique et répondent correctement aux questions qui leur sont posées ; davantage de garçons que de filles considèrent que les mathématiques sont une des matières où ils sont les plus forts. Au contraire, la proportion de filles affirmant qu'elles ont souvent des difficultés en maths et sont surprises quand elles réussissent, est supérieure d'au moins 9 % à celle des garçons (écart statistiquement significatif).

Certains indices semblent également montrer qu'outre les différences d'attitudes, des différences dans les résultats sont perceptibles dès l'école primaire. Ces différences ne sont pas globales; elles se rapportent aux différents domaines des mathématiques dans lesquels les garçons et les filles obtiennent de bons résultats. Les enquêtes de l'APU ont fait apparaître des disparités significatives à cet égard. En 1978 (Assessment of Performance Unit, 1980), les filles obtenaient des résultats sensiblement meilleurs que les garçons en calcul (nombres entiers et nombres décimaux), alors que les garçons dominaient de manière appréciable pour la "mesure" de la longueur, de la superficie, du volume et de la capacité, ainsi que pour les applications des nombres et les notions de proportion et de rapport. En 1979, il y avait deux autres domaines où les garçons obtenaient des résultats significativement meilleurs : la "mesure" de l'argent, du temps, du poids et de la température ; la catégorie des concepts (fractions et nombres décimaux). Shuard (1981) a analysé les différences entre les résultats des garçons et des filles à un test auquel Ward (1979) avait soumis des enfants de 10 ans, en Angleterre et au Pays de Galles. Ce test a montré que les filles étaient, à cet âge, meilleures en calcul, alors que les garçons les devançaient non seulement dans le domaine de la mesure et dans l'apprentissage des questions qui font intervenir une visualisation spatiale (deux points largement traités dans les documents), mais aussi en ce qui concerne l'assimilation du principe de la numération décimale, qui est essentiel pour comprendre les mathématiques et progresser dans l'étude de cette matière.

Aux Etats-Unis d'Amérique, cependant, les différences entre les résultats obtenus en mathématiques, à l'école primaire, par les garçons et les filles sont moins nettes. Fennema (1974) a analysé des études portant sur des enfants de 10 à 14 ans. Elle a conclu que :

> Les résultats des filles étaient légèrement meilleurs que ceux des garçons en ce qui concerne la technique la moins complexe (le calcul) . . . Cinq des 77 tests portant sur des aptitudes cognitives plus complexes (compréhension, application et analyse) avaient été mieux réussis par les filles, 54 par les garçons.

Dans les pays en développement, les indications dont on dispose au sujet de différences spécifiques entre les sexes du point de vue de l'apprentissage des mathématiques semblent peu nombreuses. En revanche au Royaume-Uni, les garçons réussissent mieux que les filles en mathématiques aux examens publics qu'ils passent à l'âge de 16 ans et ils sont plus nombreux que les filles à choisir les mathématiques ou les matières connexes comme sujets d'études après cet âge. Il semble que la situation soit analogue aux Etats-Unis d'Amérique.

L'IEA a fait en 1980 une enquête sur les différences de niveau en mathématiques entre garçons et filles (Steiner, 1980). Le document préparatoire notait que :

> L'incidence de diverses variables sur les différences entre garçons et filles est peut-être fonction de caractéristiques très générales du milieu qui varient sans doute d'un pays à l'autre . . . L'analyse des données devrait être faite séparément pour chaque pays, en vue de déterminer si l'interaction entre les variables est la même dans tous ces pays, ou d'identifier les différences éventuelles.

Conséquences pour la formation des maîtres

Ces difficultés et ces tendances qui caractérisent aujourd'hui l'enseignement des mathématiques dans le primaire ont des implications considérables pour la formation initiale et en cours d'emploi des maîtres, dans les pays développés comme dans ceux en développement. Si l'on cherche essentiellement à développer chez les enfants la pensée mathématique plutôt qu'à les encourager à apprendre par coeur les procédés de calcul, cela ne correspond pas aux préoccupations actuelles d'une majorité de maîtres du primaire.

Même dans un pays aussi développé que les Etats-Unis d'Amérique, une enquête d'opinion sur les "techniques de base", effectuée en 1978 parmi les membres du NCTM et leurs collègues (Denmark et Kepner, 1980), a montré que :

> Quarante pour cent des enseignants des cycles élémentaire (de la maternelle à la sixième année) et supérieur, ont indiqué qu'il fallait enseigner les techniques de base avant de présenter les concepts sous-jacents et les applications ; 61 % des enseignants du secondaire ont approuvé cette stratégie pédagogique.

La tendance à accorder une plus large place à la calculatrice à l'école primaire n'est pas non plus généralement admise par les maîtres du primaire et par le public. Trente deux pour cent seulement des instituteurs interrogés dans le cadre de l'enquête mentionnée ci-dessus pensaient que savoir se servir d'une calculatrice constituait une technique de base. Beaucoup de maîtres du primaire ont indiqué que les calculatrices ne

devraient être utilisées qu'à partir du moment où les élèves ont maîtrisé les techniques manuelles de calcul.

Il paraît également nécessaire d'élaborer de nouveaux modes d'enseignement mettant l'accent sur l'exploration à l'aide de matériels concrets, les conversations sur des questions de mathématiques, la solution de problèmes et l'application des mathématiques à la vie quotidienne des élèves, souvent en dehors de la classe. Ces techniques n'entrent pas dans la conception que beaucoup d'étudiants se font de l'enseignement des mathématiques dans le primaire quand ils commencent leur formation initiale, en particulier dans les pays où existe une forte tradition d'apprentissage passif et où, du fait de la surcharge des classes, il est extrêmement difficile d'instituer un apprentissage plus actif. En outre, il n'est pas fréquent que des modes d'enseignement novateurs soient pratiqués dans les écoles que visitent les étudiants. Ils manquent donc de modèles dont ils pourraient s'inspirer et de certitudes objectives sur l'efficacité des nouveaux modes d'enseignement.

On ne peut pas s'attendre à ce que les étudiants ou les maîtres changent de façon fondamentale et radicale s'ils ne sont pas intimement convaincus que les nouvelles méthodes donneront de meilleurs résultats et plus de satisfactions que les précédentes et si un commencement de succès ne vient pas encourager leurs premiers efforts en ce sens. Il est très improbable que la formation initiale des maîtres réussisse à elle seule à provoquer des changements durables d'attitude chez les étudiants, comme en témoigne la situation au Royaume-Uni et aux Etats-Unis d'Amérique, où ils est très courant que les cours relatifs aux méthodes d'enseignement des mathématiques mettent l'accent sur des tendances semblables à celles qui sont décrites ici. Cependant, l'enquête du PRISM a montré que les formateurs de maîtres et les inspecteurs spécialisés dans les mathématiques ont, sur l'enseignement de cette matière, des vues beaucoup plus radicales que les autres enseignants. Au cours de leur formation initiale, les futurs maîtres subissent l'influence de ces enseignants aux idées hardies. Ils sont ensuite aidés dans leur travail par des inspecteurs qui ont une approche similaire. Cependant, le climat conservateur des écoles et l'attitude des parents et de la collectivité ont souvent plus d'influence sur les maîtres que les idées pédagogiques.

Il ne faut pas s'attendre à ce que les maîtres changent réellement leur mode d'enseignement s'ils ne s'initient eux-mêmes à ces nouvelles méthodes qu'en lisant des documents, articles ou ouvrages relatifs à cette question ou en écoutant passivement des exposés. Un nouveau programme scolaire, qu'il soit élaboré par une administration centrale et mis oeuvre partout, ou choisi par une école quand elle achète une nouvelle série de manuels, ne suscite pas de lui-même des modifications de l'approche du maître. Il peut arriver qu'un élève lui dise : "D'après le livre, il me faut les cubes des dizaines et des unités pour faire ça" et

que le maître réponde, même si l'école est bien équipée : "Les cubes sont dans une autre classe. Ils sont dessinés dans le livre, tu peux le faire de tête. Tu n'en as pas vraiment besoin".

Au Royaume-Uni, l'expérience semble montrer que les maîtres qui sont directement associés aux groupes chargés d'élaborer les directives et les activités concernant le programme scolaire ont beaucoup plus tendance à traduire concrètement dans leur enseignement les convictions qui ont résulté des travaux du groupe, que les enseignants qui se contentent de lire les directives ou qui appliquent le nouveau programme sans avoir débattu de manière approfondie de ses objectifs, de son contenu et de la pédagogie qui y est liée. Les mêmes constatations ont été faites dans le cadre du Caribbean Mathematics Project [Projet pour le mathématiques dans les Caraïbes] CMP (Wilson, 1978) :

Le CMP s'est assigné comme objectif principal d'améliorer la compétence professionnelle des enseignants de mathématiques et leur confiance en eux-mêmes . . . Il y a largement réussi. Il n'est pas rare que quelqu'un nous dise : "J'enseigne les mathématiques depuis 20 ans, mais ces deux dernières années ont été pour moi, grâce à ce projet, les plus agréables, les plus intéressantes et les plus stimulantes". De nombreux enseignants ont adopté une attitude entièrement nouvelle à l'égard des mathématiques après avoir assumé une certaine responsabilité, même limitée, dans l'élaboration de matériels didactiques. Plus généralement, les enseignants de la région connaissent beaucoup mieux la nature des difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques et voient beaucoup plus clairement comment ils peuvent essayer de les aider à les surmonter . . . Les maîtres associés au project ont mis au point un mode d'enseignement beaucoup plus flexible et plus universel ; l'introduction de feuilles d'exercices, du travail en groupe et l'emploi accru d'un matériel pédagogique simple ont eu une certaine influence sur l'enseignement des autres matières . . . Les maîtres ont été formés aux techniques d'évaluation, y compris celles qui permettent de diagnostiquer les difficultés des élèves et de tester l'efficacité d'une stratégie d'enseignement spécialement mise en oeuvre pour les surmonter.

Comme pour toutes les innovations, le succès n'a pas été complet, et tous les maîtres n'ont pas adopté les nouvelles méthodes avec conviction. Les circonstances ont changé, le projet a pris fin, et beaucoup de maîtres sont revenus à leurs méthodes antérieures :

Son succès a été net chez certains maîtres, mais, avec d'autres, on ne peut faire qu'un constat d'échec. Les enseignants qui se sont montrés les plus intéressés et qui s'y sont associés le plus pleinement continuent à établir des diagnostics et à appliquer des remèdes. Dans une école primaire de la Dominique, située dans une zone montagneuse isolée, le directeur organise chaque semaine un court séminaire pour les enseignants (à cette fin, les élèves sont renvoyés plus tôt chez eux) et élabore

lui-même des unités pédagogiques simples qui sont reproduites sur la machine de l'école ... Il est malheureusement plus courant de rencontrer des maîtres moins sûrs d'eux ou moins entreprenants, qui reviennent à un manuel plus traditionnel et donc aux leçons et au programme qu'il impose.

Cependant, la régression n'est jamais totale. Les nouvelles idées sont partiellement absorbées et modifient le climat général.

La phase suivante du processus de rénovation et d'aménagement continus du programme scolaire ne part pas de la même situation que la précédente.

Il en découle essentiellement que la formation des maîtres ne peut pas être assurée isolément. L'élaboration des programmes scolaires et la formation initiale et en cours d'emploi des maîtres doivent aller de pair pour avoir un effet réel sur l'enseignement des mathématiques. C'est seulement ainsi que toutes les personnes susceptibles d'y contribuer, en s'épaulant mutuellement, inciteront les maîtres à adopter les nouveaux objectifs et à les mettre en oeuvre. En outre, les écoles ne fonctionnent pas dans le vide, sans aucun contact avec la collectivité qu'elles desservent. Beaucoup de parents s'intéressent de près à l'enseignement dispensé à leurs enfants. Ils peuvent le compléter par leur propre action ou le compromettre par leurs critiques. Ils peuvent même soutenir l'école en réunissant des fonds ou en apportant leur aide bénévole. Les mathématiques sont une matière qui constitue une source d'anxiété pour les adultes du monde entier. Il importe donc que les parents comprennent, autant que possible, comment leurs enfants les apprennent et que leur accord soit demandé lorsqu'une modification des pratiques en vigueur est envisagée. Les services extérieurs à l'école, par exemple ceux qui sont chargés de l'élaboration des programmes et de la formation des maîtres, peuvent concourir à faire en sorte que la collectivité et les parents comprennent la façon dont les mathématiques sont abordées à l'école primaire.

La formation des maîtres, aussi bien initiale qu'en cours d'emploi, devrait les aider à mieux se rendre compte de leurs progrès et à évaluer les améliorations qu'ils peuvent apporter, du point de vue professionnel à mesure qu'ils apprennent à utiliser des stratégies pédagogiques plus diversifiées que celles qu'ils employaient au début de leur carrière. Dans toute classe, il y a des élèves qui n'apprennent pas les mathématiques aussi facilement que leurs capacités le laisseraient prévoir, mais beaucoup de maîtres n'ont pas encore les compétences nécessaires pour diagnostiquer les raisons de leurs échecs et pour y remédier en fonction du mode de pensée de chaque enfant. Il faut renforcer la formation des maîtres du primaire dans l'art d'établir un diagnostic en parlant avec les élèves, d'élaborer des travaux pratiques fondés sur leur niveau de compréhension et d'en analyser les résultats.

Les instituteurs n'enseignent pas que les mathématiques. Dans la plupart des pays, ils sont chargés de toutes les matières du programme. Leur aptitude à l'enseignement des mathématiques est liée à leurs capacités pédagogiques générales. Dans le cadre de la formation initiale, il faut que les personnes qui enseignent les mathématiques aux futurs maîtres collaborent avec les autres formateurs afin de susciter chez les étudiants, durant le bref laps de temps où ils se préparent à exercer leur profession, des attitudes favorables à la réflexion et à l'apprentissage actif dans l'ensemble des matières du programme. De même, la formation en cours d'emploi doit favoriser l'intégration des mathématiques dans la conception et l'organisation globales du programme scolaire par les maîtres.

Il est nécessaire que les maîtres aient confiance en leurs connaissances mathématiques personnelles mais nous n'avons pas étudié ce point dans cette partie ; cependant les responsables de la formation initiale doivent faire tout leur possible pour que les maîtres débutants comprennent suffisamment les mathématiques pour transmettre correctement les notions. Les mathématiques doivent donc faire partie intégrante de la formation unifiée de l'instituteur. Comme l'écrit Freudenthal (1978), à propos de la formation des maîtres aux Pays-Bas :

> La réforme de la formation des maîtres du primaire exige une large intégration de la matière enseignée et de sa didactique, avec pour condition préalable que le contenu enseigné au futur maître soit assez proche de ce qu'il enseignera plus tard pour que l'intégration complète avec la didactique soit possible . . . Le développement d'un état d'esprit mathématique, afin de susciter un bon comportement pédagogique, est considéré comme plus important que la quantité de mathématique que les étudiants apprennent. Modifier la formation des maîtres dans une seule matière (les mathématiques) peut paraître utopique, mais il faut bien commencer quelque part, et qui sait si ce ne sont pas les mathématiques qui s'y prêtent le mieux ?

Il est plus facile de corriger "les idées fausses" qu'ont les étudiants quand ils entrent à l'Ecole normale si on leur apprend que les enfants peuvent penser mathématiquement, ce qui implique que le maître en est lui aussi capable. Si l'étudiant adopte, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, une attitude d'exploration active, il acquiert ainsi une technique pédagogique qui lui sera très utile pour faire face aux innovations très diverses qui seront inéluctablement introduites dans tous les pays au cours de la prochaine décennie, dans les programmes de l'enseignement primaire.

Références

ALE, S. O. 1981. Difficulties Facing Mathematics Teachers in Developing Countries – A Case Study of Nigeria. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, No. 4, pp. 479–89.

ASSESSMENT OF PERFORMANCE UNIT. 1980. *Mathematical Development, Primary Survey Report No.1.* Londres, HMSO.

. 1981. *Mathematical Development, Primary Survey Report No. 2.* Londres, HMSO.

ATHEN, H. ; KUNLE, H. (dirs. pub..) 1977. *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education.* Karlsruhe. Comité d'organisation du Troisième Congrès international sur l'enseignement mathématique.

BISHOP, A. J. 1979. Visualising and Mathematics in a Pre-Technological Culture. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 10, No. 2, pp. 135–46.

BURTON, L. D. 1980. *Report on the Skills and Procedures of Mathematical Problem Solving.* Londres, Polytechnic of the South Bank.

DENMARK, T. ; KEPNER, H. S. 1980. Basic Skills in Mathematics : A Survey. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 11, No. 2, pp. 104–23.

DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE. 1978. *Primary Education in England : A Survey by HM Inspectors of Schools.* Londres HMSO.

. 1979. *Mathematics 5 to 11 : A Handbook of Suggestions.* Londres, HMSO.

ERLWANGER, S. H. 1973. Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behaviour,* Vol. 1, No. 2, pp. 7–26.

FENNEMA, E. 1974. Mathematics Learning and the Sexes : A Review. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 5, p. 126.

FREUDENTHAL, H. 1978. Change in Mathematics Education since the Late 1950's – Ideas and Realisation : The Netherlands. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 9, No. 3, pp. 261–70.

GAY, J. ; COLE, M. 1967. *The New Mathematics and an Old Culture.* New York, Holt, Rinehart & Winston.

GERDES, P. 1981. Changing Mathematics Education in Mozambique. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, No. 4, pp. 455–77.

HART, K. M. (dir. pub.) 1981. *Children's Understanding of Mathematics : 11–16.* Londres, John Murray.

INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4th (ICME IV), Berkeley, Calif., 1980. *Abstracts of Short Communications.* Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM).

JEFFERY, B. 1978. *A Study of the Generalisation and Explanation Strategies of 10 and 11 Year Old Children in Mathematics.* University of Nottingham. (Mémoire de maîtrise non publié).

MATHEMATICAL ASSOCIATION. 1956. *The Teaching of Mathematics in Primary Schools.* Londres, Bell.

NATIONAL ADVISORY COMMITTEE ON MATHEMATICAL EDUCATION (NACOME). 1975. *Overview and Analysis of School Mathematics, Grades K-12.* Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics.

NATIONAL ASSESSMENT OF EDUCATION PROGRESS (NAEP). 1979*a. Changes in Mathematical Achievement,* 1973–78. Denver, Colo., Education Commission of the States.

. 1979*b. Mathematical Applications.* Denver, Colo., Education Commission of the States.

. 1979*c. Mathematical Knowledge and Skills, Selected Results from the Second Assessment of Mathematics.* Denver, Colo., Education Commission of the States.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). 1980. *An Agenda for Action ; Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston, Va., NCTM.

1981. *Priorities in School Mathematics.* Reston, Va., NCTM.

PREECE, M. ; STURGEON, S. 1981. *Mathematics Education and Girls.* Rapport d'un projet BP, Sheffield City Polytechnic (Royaume-Uni), (non publié).

ROTHERY, A. (dir. pub.) 1980. *Children Reading Maths.* Worcester College of Higher Education (Royaume Uni).

SCOTTISH COUNCIL FOR RESEARCH IN EDUCATION (SCRE). 1978. *Standards of Numeracy in Central Region.* Edimbrourgh, SCRE.

SEWELL, B. 1982. *Adults. Mathematical Ability and Performance.* Leicester, Advisory Council for Adult and Continuing Education (ACACE). (Version provisoire).

SHUARD, H. B. 1981. Mathematics and the 10-year-old Girl. *Times Educational Supplement* (Londres), 27 mars.

. 1982. Large-Scale Testing of Mathematical Attainment. Dans : E. Harper (dir. pub.), *Proceedings of the Annual Conference of the British Society for the Psychology of Learning Mathematics, held at the University of Bath, 18–20 September 1981.* pp. 11–29, Bath, School of Education, University of Bath.

SIMON, B. ; WILLCOCKS, J. (dirs. pub.). 1981. *Research and Practice in the Primary Classroom.* Londres, Routledge & Kegan Paul.

STEINER, H. G. (dir. pub.). 1980. *Comparative Studies of Mathematical Curricula – Change and Stability 1960–1980.* Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

SUYDAM, M. N. 1981. *The Use of Calculators in Pre-College Education, Fourth Annual State-of-the-Art Review.* Columbus, Ohio, Calculator Information Center.

COLLOQUE SUR LES INTERACTIONS ENTRE LA LINGUISTIQUE ET L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, NAIROBI, 1974. *Interactions between Linguistics and Mathematical Education ; Final Report.* juin 1975 (Document Unesco ED.74/CONF. 808/COL. 11).

UNESCO. 1981. *Etudes sur l'enseignement des mathématics,* Vol. 2, Directeur de publ. R. Morris, Paris, Unesco.

VANDEWIELE, M. ; d'HONDT, W. 1978. Quelques difficultés en mathématiques et leur perception par les élèves en classe de troisième dans l'enseignement secondaire à Dakar. *Educational Studies in Mathematics* Vol. 9, No. 4, pp. 439–60.

WARD, M. 1979. *Mathematics and the 10-year-old.* Londres, Evans/Methuen Educational. (Document de travail du Schools Council, 61).

WILSON, B. J. 1978. Change in Mathematics Education since the Late 1950's – Ideas and Realisation : West Indies. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 9, No. 3, pp. 355–79.

Fidel M. Oteiza

L'environnement, source pour le programme de mathématiques élémentaires

Introduction

Le présent chapitre s'efforce de définir l'utilisation possible de l'environnement quotidien des élèves pour le programme de mathématiques et les limites de cette utilisation. Il part du principe que l'environnement a toujours puissamment stimulé l'activité mathématique et en tire quelques conséquences élémentaires pour l'enseignement. Il souligne ensuite, pour achever l'examen des ces conséquences, l'importance de la pensée formelle, et étudie les modes particuliers de l'interaction de différentes approches du programme avec l'environnement scolaire. Il pose la question des valeurs, ainsi que certains problèmes connexes concernant la façon dont différentes écoles de pensée contemporaines abordent l'environnement. Il analyse le choix des objectifs et examine la question inévitable : de quelles mathématiques l'adulte a-t-il besoin après avoir quitté l'école ? Il essaie d'y répondre en offrant un choix entre les options formulées dans les sections précédentes.

Il décrit ensuite, sur la base des expériences menées en Amérique latine, une méthode particulière pour choisir les objectifs de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il déduit certains principes directeurs des résultats de ces expériences et présente diverses recommandations d'ordre méthodologique. Il s'attache, pour conclure, à définir les implications de cette approche pour la formation des maîtres.

L'environnement a toujours puissamment stimulé l'activité mathématique

Ce n'est pas un hasard si les mathématiques se sont initialement assimilées à la géométrie, qui est la description des formes et des relations que nous pouvons discerner dans l'espace qui nous entoure. Nous savons, aujourd'hui, qu'il y a un nombre infini de géométries possibles. La vision de cette pluralité nous est ouverte depuis le siècle dernier, grâce aux

travaux de Lobatchevski et Riemann. Mais le géométrie d'Euclide est celle qui utilise les concepts tirés de notre expérience sensorielle, car les sens sont la source des images sur lesquelles reposent les notions de point, de droite, de volume, de parallèles, d'intersection, etc.

Les nombreux modèles élaborés pour décrire, expliquer ou prévoir les phénomènes physiques sont aussi des créations mathématiques. Le concept de vecteur nous permet de traiter les interactions de ces phénomènes, comme les mouvements, les accélérations et les forces. La naissance du calcul infinitésimal fut, au moins chez Newton, très liée à la recherche d'un modèle de la variation de la vitesse sous l'influence d'une force centrale. Une pièce jetée en l'air et un jeu de cartes ont ouvert à Bernoulli les voies d'accès au monde aujourd'hui immense de la théorie des probabilités. De même, Lagrange, Laplace et Hamilton ont élaboré un remarquable éventail de modèles mathématiques afin de résoudre les problèmes posés par l'astronomie et la mécanique. Maintenant, la statistique et l'informatique constituent assurément des formes appliquées des mathématiques : les évaluations, les recensements, l'expérimentation et le traitement des données font tous intervenir la relation entre l'homme et son environnement.

Les exemples ci-dessus devraient suffire à illustrer notre principe fondamental, à savoir que l'environnement constitue une source fructueuse pour la créativité mathématique. On peut en tirer quelques conséquences méthodologiques pour les mathématiques élémentaires et leur dépendance vis-à-vis de l'environnement :

Les concepts et les modèles mathématiques qu'on peut tirer de l'environnement sont nombreux et doivent suffire à occuper pleinement le temps de tout élève et satisfaire aux exigences de toute école.

On ne discerne pas immédiatement les concepts et les modèles mathématiques à partir des phénomènes physiques, chimiques ou sociaux qui leur donnent naissance. Il faut donc utiliser l'environnement de façon à pouvoir passer du particulier au général, et des phénomènes aux lois qui les régissent.

Il importe d'examiner les moyens utilisés par les chercheurs (qui construisent des modèles mathématiques) pour aborder l'environnement, et d'élaborer des méthodes d'enseignement en se fondant sur leurs techniques.

Il paraît important de tenir compte de l'origine modeste de nombreux modèles mathématiques précieux, qu'il est difficile de déceler dans les formules achevées que donnent les livres. Le maître, qui doit expliquer aux jeunes le principe et l'emploi des modèles, ne dispose donc pas facilement d'informations concernant leur genèse.

Enfin, il ne faut pas oublier que la découverte ou la construction d'un modèle fait largement appel à l'induction. Ce processus se caractérise par des avancées, des retours en arrière et de brusques changements

de direction ; il revêt en quelque sorte, pour celui qui cherche à le mener à bien, un caractère expérimental. Initialement, les modèles ne sont pas généraux et formalisés et ne contiennent souvent que des démonstrations approximatives. Il est utile de se rappeler cela quand on procède à des expériences pédagogiques visant à mathématiser des aspects de l'environnement.

L'apport de la pensée

Il y a loin des fluxions de Newton aux formulations de Weierstrass, même sans tenir compte des deux siècles qui les séparent dans le temps. Où peut-on retrouver l'intuition élémentaire dans la théorie des groupes ou la classification des espaces topologiques ? Si l'environnement est un puissant stimulant, les mathématiques n'en sont pas moins une création de l'homme. Ajoutant les concepts aux concepts et les structures aux structures, il a érigé un édifice de raisonnements complexe et puissant, et c'est avant tout cette construction théorique que nous appelons les mathématiques. L'histoire montre que ce n'est pas seulement l'environnement, mais aussi les modèles qu'il a suscités qui alimentent la créativité mathématique. Sur le long chemin qui a mené de l'intuition première, provoquée par l'observation de la nature, aux modèles formels des phénomènes, les structures, en se supplantant, sont devenues de plus en plus abstraites, générales ou simples. L'histoire montre aussi comment certaines de ces abstractions, apparemment éloignées de la réalité (par exemple, les nombres complexes, les groupes ou les tenseurs) semblent avoir attendu l'occasion de se transformer en modèles appliqués. Les théories sur lesquelles reposent les télécommunications, la physique quantique et la relativité elle-même permettent d'exprimer des lois ou de décrire des phénomènes.

C'est précisément cette capacité de théoriser qui caractérise l'intelligence humaine. Une approche méthodologique ne serait pas complète si elle ne préparait pas l'élève à l'activité déductive. L'environnement peut constituer le point de départ, ou le point d'arrivée, mais c'est l'interaction entre l'homme et son environnement, source de transformations mutuelles, qui permettra à l'élève de structurer son intellect en structurant la réalité (Piaget, 1966).

Le caractère formel des mathématiques a aussi des conséquences pour l'élaboration d'une approche méthodologique :

Elles ont leur propre registre linguistique qui doit être appris et employé.

Que faut-il exiger de ce langage et comment peut-on faciliter son intégration au répertoire de l'élève ?

C'est un langage formel. Au cours de sa formation, l'élève devra se familiariser avec les représentations graphiques des concepts et avec

le processus de symbolisation.

Les mathématiques impliquent des abstractions et des généralisations. La recherche de régularités, la classification, la définition de termes généraux, l'induction de formules ou de modèles à partir de cas particuliers contribuent au développement de ces capacités.

La construction de mathématiques formelles suppose l'élaboration de modèles perfectibles. Cette construction a un caractère dynamique qui doit apparaître dans l'enseignement, de même qu'il ne faut jamais perdre de vue la relativité des modèles, qui peuvent être améliorés.

Plutôt que de continuer cette liste, nous pouvons conclure en soulignant qu'il importe de cultiver chez l'élève l'aptitude au raisonnement inductif. La structure "Si, A, alors B" doit être employée fréquemment et avec soin. C'est une autre façon de développer la capacité de raisonnement axiomatique de l'élève. Cela lui permet d'économiser les hypothèses et d'éviter les contradictions internes dans les modèles qu'il utilise.

Ces considérations soulèvent un certain nombre de questions importantes. Comment peut-on exploiter la richesse de l'environnement, en tant que générateur de pensée mathématique, pour former des talents ? Comment peut-on établir une relation significative entre l'environnement et l'édifice formel des mathématiques, de manière que l'élève puisse tirer parti des deux sources ? Quelle sorte de formation peut conduire le maître à distinguer les structures abstraites dans son environnement ? Comment peut-on l'aider à utiliser cette faculté pour organiser des convergences entre ses élèves, l'environnement et les modèles mathématiques ? Pour aborder ces questions, il paraît indispensable d'élaborer des méthodes susceptibles d'être appliquées pour établir une liaison appropriée entre les mathématiques scolaires et l'environnement.

Tendances des programmes scolaires

Si l'on veut élaborer un programme scolaire de mathématiques à partir de l'environnement, il est nécessaire de prévilégier un certain nombre d'objectifs pédagogiques par rapport aux autres. R. Tyler (1969), dans son modèle bien connu, propose trois sources pour les objectifs scolaires : la culture, la société et les élèves eux-mêmes. Dans ce cadre, l'environnement est défini en fonction des réalisations de l'humanité (c'est-à-dire la culture), des exigences de la société, et des besoins ou des aspirations des élèves. Il existe aussi un lien entre la source des objectifs et les méthodes utilisées pour les déceler, les choisir et les formuler. Traditionnellement, les mécanismes employés pour incorporer les objectifs à

l'enseignement étaient les suivants : la tradition éducative elle-même, y compris les traditions de pays lointains, comme celles que suivent de nombreux pays du Tiers Monde qui ont des liens culturels avec d'autres pays; les transformations progressives résultant de la pratique et provoquées par des changements survenus à l'extérieur de l'école ; les réformes décidées à un niveau politique supérieur ; et, plus rarement, les transformations reposant sur des diagnostics ou sur l'évaluation de besoins.

Des options philosophiques et des judgements de valeur de nature plus générale influent à la fois sur les sources des objectifs et sur les méthodes utilisées pour les choisir. En fonction des philosophies sur lesquelles ils se fondent, McNeil (1977) a distingué quatre types de programmes solaires contemporains : un humaniste, un académique, un axé sur le changement social, et un essentiellement technologique.

Cette classification, bien qu'arbitraire comme toutes les classifications de ce genre, aidé à mettre en évidence certaines questions fondamentales. Comment différents courants dans le domaine de l'éducation perçoivent-ils la relation entre l'élève et son environnement ? Comment la concrétisent-ils ? Un programme scolaire peut être considéré comme humaniste s'il met l'accent sur l'épanouissement individuel (Oteiza et Messina) et s'il favorise le développement de forces libératrices tendant à donner à l'élève les moyens de faire des expériences intégratrices. La créativité et la confiance en soi constituent les deux buts spécifiques de ceux qui adoptent ce type d'approche.

Dans cette classification, on appellera "académique" un type de programme scolaire axé sur la connaissance et visant, fondamentalement, à développer des structures cognitives. Il est facile de se rendre compte que cette catégorie recouvre le mouvement de réforme des années 1960 et il suffit peut-être de rappeler à ce sujet le rapport de la Conférence de Cambridge (1963).

Un programme scolaire peut être considéré comme sociologique ou orienté vers le changement social s'il privilégie les impératifs sociaux par rapport aux besoins personnels. Selon Freire (1977), le rôle ou la finalité de l'enseignement est la transformation du monde par la transformation des consciences.

Enfin, un programme scolaire peut être décrit comme technologique s'il est conçu de manière à favoriser l'élaboration de systèmes d'enseignement efficaces et productifs. Les programmes de ce type sont établis avec soin et peuvent être continuellement améliorés ou optimisés.

Chacune de ces approches implique un choix en termes de philosophie et de valeurs. Chacune aborde d'une certaine manière la relation entre l'homme et son environnement et suscite ses propres objectifs pédagogiques. L'humaniste voit dans l'environnement une source d'épanouissement personnel. Il inscrit la relation entre l'élève et son environnement dans un climat de permissivité. L'environnement constitue donc une source d'objectifs ou un champ d'application des

connaissances, dans la mesure où l'élève en tire profit pour sa formation personnelle. L'expérimentation, l'observation et l'application sont les trois activités encouragées par l'approche humaniste.

La situation est différente lorsque le programme scolaire est de type académique. Dans ce cas, la source des objectifs pédagogiques est la culture. Les matières étudiées montrent le chemin à suivre. L'homme aborde la nature ou son environnement avec l'intention de les comprendre et de tester ses hypothèses. La relation entre l'environnement et le programme de mathématiques est lâche. Les aspects formels des mathématiques prennent en revanche de l'importance.

Pour ceux qui voient dans le programme scolaire un instrument de changement social, la relation entre l'homme et son environnement est fondamentale. Il n'y aurait pas d'activité humaine s'il n'y avait pas une réalité objective, un monde extérieur à l'homme et capable de défier son moi (Freire, 1977). L'important ici est l'interaction active, la *praxis*, c'est-à-dire "la réflexion et l'action (des hommes) sur le monde, dans le but de le transformer" (Freire 1977). La relation est alors dynamique et réflexive : le défi de l'environnement est un appel à l'action, par laquelle l'homme transforme l'environnement. En même temps, il réfléchit au sens de son action et modifie ainsi ses propres connaissances.

Dans l'optique technologique, il faut structurer l'environnement afin de créer des conditions extérieures qui favoriseront le processus d'apprentissage (Gagné, 1977). Dans ce cas, la mise au point de "moyens" remplace l'approche directe de l'environnement.

Comme indiqué plus haut, cette classification des programmes scolaires est arbitraire et loin d'être exhaustive (Eisner et Wallace, 1979). Dans la perspective de la présente étude, ce sont les principes sous-jacents qui importent. Des conceptions philosophiques différentes impliquent des façons différentes de se représenter l'environnement et donc des formes différentes d'interaction entre l'élève et celui-ci. Inversement, utiliser l'environnement comme source d'objectifs et – surtout – choisir dans ce but une démarche spécifique impliquent qu'on opte pour système de valeurs particulier. Par conséquent, le maître doit être préparé à ce type de choix et avoir les connaissances théoriques qui lui permettront de comprendre son action.

Il serait intéressant d'identifier les causes de l'intérêt actuel pour l'environnement en tant que source d'objectifs. Ne serait-ce qu'une réaction à l'académisme excessif des années 1960 ? Ou qu'une de ces "modes" que l'on suit en éducation ? Ou bien est-ce le signe d'un choix plus sérieux, traduisant l'attention portée aux conditions de vie de millions d'êtres humains ? Faute de recul historique, on ne peut que se borner à poser ces questions. En tous cas, cette tendance prouve que les programmes scolaires existants ne donnent pas satisfaction. En outre, en se tournant vers un enseignement appliqué, orienté vers l'environnement, on abandonne l'attitude élitiste qui laisse aux experts le soin de

décider quelles mathématiques conviennent au peuple et on transfère dans la salle de classe une partie du processus de décision.

Les différentes approches

Avant d'analyser les conséquences méthodologiques de la démarche adoptée, il n'est sans doute pas inutile de récapituler certaines des conclusions qui peuvent être tirées des sections précédentes :

L'environnement de l'élève fournit en abondance des bases solides pour construire un programme de mathématiques.

La mathématisation de l'environnement, ou la création de modèles abstraits fondés sur une analyse de la réalité, est une tâche complexe qui exige formation et connaissances.

Il importe de déterminer les compétences qu'un maître doit posséder pour être à même de distinguer les structures mathématiques dans l'environnement et de les utiliser pour élaborer ou compléter le programme.

La construction de modèles mathématiques est habituellement une activité inductive, caractérisée par un processus d'essais et d'erreurs, de retours en arrière, de reformulations et de changements de direction. Ces caractéristiques sont très différentes de celles des cours magistraux.

L'élaboration de formalismes et de théories est un élément important de la construction de l'édifice mathématique. Cette "deuxième phase" des mathématiques (Dienes, 1966) est axiomatique, déductive, formelle, symbolique et détachée de toute référence physique ou concrète. Elle recherche la cohérence interne et l'économie d'hypothèses. Quand on élabore une méthode d'enseignement, la présence de cette "phase" est importante. Si on essaie d'utiliser l'environnement comme source pour les mathématiques, il faut donc toujours prendre soin de préciser de quelle façon le processus exploratoire, appliqué et empirique s'accompagnera de la réflexion et de la formalisation nécessaires.

Enfin, les valeurs jouent un rôle de premier plan dans le choix des objectifs et des méthodes. Cela signifie, d'une part, que toute utilisation de l'environnement pour les besoins des mathématiques scolaires implique pour l'enseignant une importante responsabilité. D'autre part, le terme même d'"environnement" a des connotations très différentes, suivant la philosophie de celui qui l'emploie.

De quelles mathématiques les adultes ont-ils besoin ?

De quelles connaissances mathématiques un citadin, un paysan ou un autre adulte ayant terminé sa scolarité a-t-il besoin ? Là, nous ne pouvons, rester dans les généralités. L'école s'est posé cette question; ainsi on y enseigne, entre autres, les opérations élémentaires, les nombres décimaux, les fractions, les rapports et les pourcentages, parce que tout cela est jugé nécessaire pour la vie quotidienne. Il faut poser la question de façon différente. Il est utile de savoir trouver un abonné dans un annuaire de téléphone, une parenté dans un arbre généalogique ou l'échelle d'une carte ou d'une maquette. Nous y reviendrons dans l'étude de la méthode. Mais ne peut-on aller plus loin ? Les expériences sur lesquelles repose la présente étude se fondaient sur les interrogations suivantes :

Quelles sont les mathématiques nécessaires à ces hommes et à ces femmes, vivant dans cette collectivité, et pour quels problèmes particuliers ont-ils besoin des mathématiques ?

Quelles mathématiques leur permettront de mieux accomplir leur travail, de comprendre la structure des relations en jeu et d'organiser leur collectivité ou leur vie ?

Quels modèles, dans quel ordre, et construits de quelle façon, peuvent le mieux contribuer à la formation d'un jeune privé de stimuli ?

Quelles stratégies ont-ils à leur disposition pour résoudre des problèmes ? Quelles stratégies peuvent-ils le mieux apprendre et lesquelles se prêtent le mieux à des transferts ? (Oteiza, 1977).

Pour répondre à ces questions, il fallait élaborer une méthode de choix des objectifs mathématiques fondée sur une analyse des besoins. Les grandes lignes de cette méthode sont exposées plus loin. Les expériences dans lesquelles on l'a appliquée ont débouché sur l'élaboration d'un programme destiné aux adultes. Ce programme d'enseignement a été utilisé avec des groupes très différents : adultes suivant des cours du soir, travailleurs d'entreprises autogérées, pêcheurs de plusieurs villages côtiers, groupes divers de travailleurs organisés, y compris dans le secteur rural (Montero et Oteiza, 1977).

C'est cette diversité même qui a imposé la conception d'un programme qui soit adaptable et souple sans cesser d'être applicable.

La détermination des objectifs s'est effectuée de concert avec les intéressés. Pourquoi voulaient-ils un programme d'enseignement ? Qu'en attendaient-ils ? De quelles mathématiques avaient-ils besoin, ou pensaient-ils avoir besoin ? Les réponses furent aussi diverses que les groupes consultés : "Il faut que nous apprenions la comptabilité"; "Il faut que j'apprenne à lire un bilan" ;"Il faut que nous apprenions à lire un plan" ;"Regardez ces pièces métalliques, on les fabrique à partir de ces schémas" ; "Il faut que nous apprenions à le faire nous-mêmes" ;

"Nous voulons être capables de comprendre ces chiffres" (modes d'emploi d'engrais et de médicaments pour le traitement de certaines maladies animales).

Un autre type de demandes concernait l'obtention de diplômes scolaires : "Il faut que je passe le certificat d'études pour garder mon travail" ; "Je veux terminer mes études primaires" ; "Nous voulons poursuivre nos études".

Pour faire face à une telle diversité de besoins, il fallait construire un modèle qui soit à la fois spécifique à chaque groupe, applicable à plusieurs et approprié pour tous. Trois concepts ont donc été retenus : celui de programme spécifique, celui de programme appliqué et celui de programme minimal. On passait de l'un à l'autre par un processus de superposition. En considérant successivement les besoins spécifiques de chaque groupe, on obtient les ensembles d'objectifs 0_1, 0_2, 0_3, . . . Si on superpose ensuite 0_1, 0_2, 0_3, . . . on trouve quelques éléments communs à tous les ensembles. Certains sont spécifiques à chaque groupe. On a donné le nom de *programme spécifique* aux objectifs qui ne se retrouvent dans aucun autre ensemble d'objectifs. Ce programme ne répond qu'aux besoins d'un groupe particulier. Le nom de *programme appliqué* a été donné aux objectifs communs à deux ensembles ou davantage, mais pas à tous. Enfin, le nom de programme *minimal* a été donné aux objectifs communs à tous les ensembles.

Il y a donc, par définition, autant de programmes spécifiques que de groupes différents de personnes ayant besoin d'apprendre les mathématiques. Il n'y a qu'un programme minimal. Il y a plusieurs "programmes appliqués".

Parmi les objectifs relevant de chacun de ces trois types de programmes, les suivants peuvent être cités à titre d'exemple :

Spécifique : "L'interprétation des échelles" constituait un objectif pour un seul des groupes d'adultes.

Appliqué : "Les proportions dans les mélanges de liquides" était un objectif pour plusieurs groupes.

Minimal : "Les opérations sur les nombres décimaux" était un objectif commun à tous les programmes.

L'étude a commencé, dans chaque cas, par le programme spécifique. Après avoir déterminé les objectifs qui répondaient aux besoins d'un groupe particulier, nous avons défini par une analyse des tâches les moyens de les atteindre. Puis, nous avons employé une stratégie différente. Tout en considérant comme acceptable le caractère purement utilitaire des demandes des participants, nous nous sommes demandés s'il était suffisant. Nous avons répondu par la négative et avons jugé souhaitable d'analyser les besoins exprimés à la lumière du principe suivant : les participants devaient être préparés à l'étude de mathématiques de niveau plus élevé ou de technologies qu'ils puissent intégrer à leur travail. Il s'agit ici de favoriser l'indépendance de l'étudiant par

des stratégies cognitives de haut niveau (Gagné et Briggs, 1979). C'est pourquoi, en examinant chaque sujet ou chaque ensemble d'objectifs, nous nous sommes posé les questions suivantes :

Que peut-on faire d'autre avec le même contenu ? Horizontalement, c'est-à-dire en l'appliquant à de nouvelles situations, et verticalement, pour se familiariser avec des concepts de plus haut niveau ?

Le langage mathématique employé permettra-t-il à l'étudiant de poursuivre ses études s'il le désire ?

Quelles stratégies cognitives inhérentes aux objectifs peut-on approfondir ?

A la suite de cette deuxième analyse, nous avons incorporé aux programmes résultant du processus de consultation des applications, des éléments du langage mathématique moderne, des activités complémentaires en géométrie et – surtout – des techniques de solution de problèmes. Dans plusieurs cas, nous avons élaboré des matériels complémentaires présentant des aspects formels ou symboliques, de niveau plus élevé. Les programmes spécifiques étaient donc le fruit d'une étude empirique et d'une analyse théorique et technique.

Ce modèle a aussi été employé pour déterminer les activités pédagogiques, avec plusieurs critères de choix. Supposons, par exemple, que le programme spécifique ait été axé sur l'étude de cas, le travail de groupe, les jeux de simulation et les problèmes directement tirés de situations rencontrées dans la vie. Dans le programme appliqué, un éventail plus large d'illustrations a alors été employé. Dans certains cas, les situations réelles étaient tirées à la fois de l'agriculture ou de l'industrie. En revanche, les exemples utilisés pour enseigner le programme minimal étaient tirés de l'univers du travail quotidien. De même, un certain travail a été accompli sur les graphiques accompagnant les textes, sur la forme d'espagnol employée et sur les facteurs pouvant constituer une source de motivation.

Il a été constaté que ce modèle se révélait capable d'attirer de nouveaux groupes. Les pêcheurs, par exemple, voulaient apprendre les rudiments de la géométrie pour construire des bateaux. Il leur fallait aussi s'initier aux calculs financiers. Leur programme spécifique (le cinquième mis au point) était limité et portait surtout sur les mesures et la lecture des plans. Ils pouvaient utiliser les notions de comptabilité qu'ils avaient déjà apprises, avec de légères modifications.

Un programme spécifique, mais ayant une certaine orientation universelle, a ainsi été produit. Tout en donnant les moyens de résoudre des problèmes pratiques dans un domaine bien défini, il ouvrait aux participants de nouvelles possibilitiés. Il permettait même de passer d'un programme à un autre en se bornant à compléter les connaissances déjà acquises.

En résumé, nous avons donc élaboré autant de programmes spécifiques qu'il y avait de groupes ayant besoin de connaissances

mathématiques. Chacun de ces programmes était le fruit d'une analyse empirique effectuée en partant de l'environnement et d'une analyse "théorique" effectuée en partant des mathématiques et de la psychopédagogie. Les intersections de ces programmes ont défini le programme minimal et servi de ligne directrice pour répondre aux nouveaux groupes d'adultes tentés par une participation à l'expérience.

Méthodologie et stratégies d'enseignement : quelques principes directeurs

Les aspects opératoires sont primordiaux dans toute démarche pédagogique. Dans le cas présent, où il s'agit d'élaborer un programme de mathématiques fondé sur l'environnement, il convient de suggérer certains principes méthodologiques. Nous décrivons ci-après une méthodologie conforme aux prémisses énoncées dans les sections précédentes, au moyen d'énoncés de type axiomatique susceptibles de fournir une orientation pour des actions spécifiques. Le lecteur remarquera, dans la présente section, l'influence du pyschologue suisse Jean Piaget ; plusieurs des recommandations formulées se fondent sur son oeuvre.

Recommandations générales

En ce qui concerne le choix des objectifs, il convient d'ajouter les éléments suivants au modèle de base évoqué dans la section précédente :

Le programme doit découler des besoins et des aspirations des participants. Si ces derniers forment un groupe organisé ou ont des liens culturels étroits (s'ils constituent, par exemple, une collectivité), l'élaboration du programme doit commencer par un projet de recherche participative, dans le cadre duquel le groupe et le chercheur vont s'efforcer ensemble de définir les buts pédagogiques qui aideront le mieux la collectivité en question à atteindre ses fins.

Dans cette optique, le début du processus d'élaboration du programme fait intervenir dans l'apprentissage à la fois les participants et le chercheur qui leur apporte son concours.

Cependant, il faut dépasser les objectifs purement utilitaires et permettre l'accès à de nouvelles connaissances, tout en apprenant aux participants à étudier de façon indépendante.

Une attention particulière doit être accordée à la tâche difficile consistant à faciliter l'apprentissage de technologies ou l'emploi de modèles qui sont étrangers à une culture, sans que les participants

perdent confiance en eux ou dans les ressources de leur communauté. Les participants abordent le travail mathématique avec des stratégies "raisonnables mais incomplètes", selon les termes de Robbie Case (1981). La technique de la formulation de stratégies spontanées, qui sont utilisées ensuite pour en élaborer de plus puissantes, s'est révélée fructueuse dans nos expériences. Elle a aussi donné d'excellents résultats pour Case.

Les principes directeurs ci-après sont proposés pour les expériences d'apprentissage (Messina et Oteiza).

Le principe de construction

L'enseignement devrait offrir à l'étudiant des activités qui lui permettront de développer ou de reconstruire ses connaissances. L'étudiant devrait mener ces activités en relation directe avec son environnement. C'est cet environnement qu'il soumettra à ses recherches et qu'il transformera.

Le principe d'organisation

Les étudiants devraient être encouragés à créer des systèmes pour organiser l'information acquise. L'enseignant devrait contribuer à organiser l'interaction entre l'étudiant et l'environnement, puis faciliter la description orale ou écrite des faits observés et étudiés. Cela ouvrira la voie à l'élaboration de plans d'organisation, de résumés, de diagrammes, de tableaux, d'organigrammes et de schémas de relations.

Le principe de fonctionnalité du savoir

L'enseignement devrait tendre vers la création de structures reflétant un degré croissant de généralité et d'abstraction. Ainsi, chaque structure prépare le terrain pour l'élaboration ou l'acquisition de modèles de niveau supérieur.

Le principe d'unité

Les fonctions cognitives, affectives et sociales de l'étudiant devraient être prises en considération. Le processus d'interaction avec l'environnement peut constituer une source fructueuse d'expériences affectives et sociales qui viennent s'ajouter aux expériences cognitives.

Le principe d'activité

Le processus d'apprentissage résulte de l'activité de l'étudiant. En ce qui concerne la relation élève-environnement, il est particulièrement important d'établir l'habitude de l'observation et de développer les techniques nécessaires, de cultiver l'aptitude à enregistrer l'information et d'utiliser des situations expérimentales où l'étudiant observe le

résultat de ses actions.

Recommandations relatives au rôle de l'étudiant

Il convient de créer des conditions dans lesquelles l'étudiant :
Participe aux choix et aux décisions intervenant dans le processus d'étude ;
Connaît les données ou les critères nécessaires pour déterminer s'il a atteint ou non un objectif fixé ;
Agit de façon indépendante en ayant la latitude de faire des essais et de commettre des erreurs dont il assume la responsabilité ;
Est astreint à exposer dans son propre langage (ou en utilisant des graphiques, des schémas ou des diagrammes) les résultats de son travail ;
Apprend à rechercher des solutions par lui-même avant de poser des questions ;
A des occasons de discuter ;
A l'occasion d'enseigner à ses camarades ou d'apprendre d'eux ;
Définit ses propres buts et apprend à proposer les moyens de les atteindre.

Recommandations relatives au rôle de l'enseignant

L'enseignement devrait offrir un vaste éventail d'activités dans lesquelles un ou plusieurs modèles mathématiques sont reliés à des situations sociales ou culturelles, ou à des phénomènes qui se produisent dans l'environnement physique ;
Il devrait proposer des buts, accepter à ce sujet des suggestions, et aider à les clarifier et à les expliciter. Il devrait assister l'étudiant dans ses choix. Il devrait élaborer, avec l'étudiant, des critères permettant de déterminer si le but a été atteint ou non. Une fois les buts établis, il devrait apporter pleinement son concours au processus d'apprentissage ;
Il devrait encourager les comportements indépendants, créatifs et coopératifs et valoriser l'initiative ;
Il devrait toujours rester tolérant et attentif dans son rôle de soutien;
Il devrait toujours prêter attention aux aspects positifs du comportement de l'étudiant. Même la réponse la plus erronée a un aspect constructif. Son rôle est de le découvrir et d'aider l'étudiant à en tirer parti ;
Il ne devrait intervenir que si on le lui demande ou si c'est vraiment nécessaire (dans les deux cas, il doit agir plutôt que parler) ;
Il devrait considérer que les erreurs sont naturelles parce qu'inhérentes au processus de recherche ;
Il ne devrait pas paraître impatient d'obtenir des résultats. Le processus est généralement lent (ce qui importe réellement est qu'il ait lieu, et ce dans l'esprit de l'étudiant) ;

Son attitude devrait donner l'impression qu'il s'engage personnellement et qu'il est curieux de voir quels résultats seront obtenus (l'environnement est un laboratoire dans lequel tous, sans exception, s'instruisent) ;

Quand ses élèves hésitent et ne peuvent trouver d'explication aux phénomènes qu'ils observent, il doit les guider en leur posant des questions ; il doit s'exercer à cela, ainsi qu'à faire des suggestions et à écouter ses élèves ;

Quand il pose une question, il devrait accorder le temps nécessaire pour y répondre et mettre l'étudiant sur la voie en reformulant sa question s'il le faut ;

Il devrait éviter les questions creuses auxquelles on ne peut répondre, car elles habituent les étudiants à ne rien dire ; une réponse partielle de l'élève est toujours préférable à une réponse complète de l'enseignant ;

S'il prend part au travail de groupe, il devrait adopter le ton et l'attitude d'un participant ordinaire, il ne devrait pas imposer ses points de vue mais plutôt faire des suggestions et laisser les autres agir ;

Si ses idées ne sont pas acceptées, c'est parce qu'elles ne conviennent pas au groupe ou qu'elles ne sont pas comprises. Il est inutile et contraire au processus de recherche qu'il se prévale de son autorité. Il doit écouter et rechercher soit une autre façon de présenter les choses, soit les failles de son propre raisonnement.

Recommandations sur la façon de déterminer le contenu du programme et de le traiter

Les mathématiques peuvent être considérées comme un processus, ou comme des édifices de relations. Dans le premier cas, l'accent est mis sur le développement du raisonnement mathématique ; dans le second, sur les structures formelles qui en découlent. Ces deux aspects doivent se retrouver dans l'enseignement (Dienes, 1971).

Apprendre les mathématiques équivaut à établir des relations. Plus précisément, apprendre revient à transformer ou édifier des structures, en passant des éléments à l'ensemble, et de l'ensemble à ses éléments. On intègre des éléments à une structure ou on transforme une structure pour y incorporer un nouvel élément.

La recherche de régularités, la classification, l'organisation, l'élaboration de modèles, la recherche d'exemples ou de contre-exemples et la recherche d'énoncés généraux contribuent à l'établissement de ces relations.

La description des phénomènes, l'utilisation efficace du raisonnement, l'emploi de symboles, de structures logiques (si . . . alors . . .), le recours aux diagrammes et graphiques et à l'expression verbale ou arithmétique pour communiquer la pensée, et l'emploi de symboles pour transmettre les notions établies, contribuent au développement

de la pensée formelle.

Pour que les concepts constituent des éléments actifs du processus de raisonnement, ils doivent avoir un "contenu". Autrement dit, l'élève doit être familiarisé avec les éléments qui constituent l'ensemble défini par le concept. On peut considérer que le concept a un "contenu" si l'élève est capable de donner des exemples, d'indiquer des non-exemples et de saisir la nécessité du concept pour délimiter la catégorie regroupant ces exemples.

L'enseignement devrait offrir l'occasion de mathématiser des situations concrètes. Au début, les élèves doivent décrire les modèles qui en découlent dans leur propre langage. Une fois qu'ils maîtrisent assez bien la situation étudiée, ils peuvent passer à une description plus formelle.

Il faut traiter le contenu enseigné dans son contexte. Concepts et modèles devraient être reliés entre eux et avec la réalité.

Le langage mathématique que l'enseignant emploie devrait être aussi précis que possible en restant assimilable par l'auditoire. La même précision ne peut être attendue des participants (Davis, 1966).

Le vocabulaire mathématique devrait être limité au minimum et transmis par l'usage. L'utilisation de définitions formelles risque de donner l'impression illusoire d'un niveau mathématique supérieur. Cela reste souvent superficiel et dénué de sens pour l'élève.

Conséquences pour la formation des maîtres

Les caractéristiques d'une pédagogie des mathématiques élémentaires ont été brièvement décrites dans la section précédente. Comment former les maîtres à ce type d'approche ? Quels éléments cette formation devrait-elle inclure, indépendamment des composantes traditionnelles ? Il faut revoir presque tous les aspects de la formation des maîtres si l'on veut utiliser des stratégies qui mettent l'accent sur l'interaction de l'élève avec l'environnement.

La formation en mathématiques

Dans ce domaine, il est préférable de choisir quelques modèles mathématiques et de les traiter de façon approfondie plutôt que de donner une formation générale. Les nombres rationnels et réels, la géométrie euclidienne, et l'emploi des algorithmes algébriques devraient notamment être abordés, ainsi que l'utilisation des graphiques, des organigrammes et des diagrammes de relations. Il est utile que le maître sache manipuler les notions physiques élémentaires, puisque les modèles mathématiques de la vitesse, de la force et du courant électrique, par exemple, sont liés

à des aspects quotidiens de l'environnement. En général, il faudrait s'attacher à familiariser les maîtres avec les applications des mathématiques et, plus particulièrement, à les habituer à mathématiser les situations de la vie quotidienne.

La formation en méthodologie

En règle générale, le mode d'apprentissage des mathématiques par le maître devrait être conforme aux méthodes qu'il est censé appliquer par la suite. Si, par exemple, il doit élaborer des concepts avec ses élèves, il faut qu'il commence par le faire pendant sa formation. Citons, parmi les questions qu'il est important d'approfondir, l'étude détaillée de la somme des recherches sur la solution de problèmes, en particulier verbaux, l'enseignement des mathématiques appliquées, l'expérience des laboratoires d'enseignement, et la pratique de la construction et de l'amélioration des modèles mathématiques fondés sur des situations réelles.

L'enseignant en tant qu'organisateur

Une méthode orientée vers l'environnement exige que le maître soit capable de prendre des décisions et d'évaluer les résultats de son action (et non ceux de l'apprentissage seulement). En même temps qu'on lui donne la possibilité de prendre des décisions, on doit lui inculquer les connaissances techniques nécessaires pour exercer cette liberté. Il faut en particulier apprendre aux maîtres à organiser le programme à partir des informations fournies par les diagnostics, à élaborer des stratégies d'apprentissage, à choisir et à réaliser des matériels pédagogiques, à maîtriser les techniques et la pratique de l'évaluation formative des expériences d'apprentissage.

L'enseignant en tant que chercheur

L'aptitude de l'élève à faire des recherches est une caractéristique essentielle de la méthodologie résultant des considérations exposées plus haut. Aussi faut-il que le maître soit bien formé aux techniques d'observation. Si on ne devait retenir qu'une des recommandations formulées dans la présente section, il faudrait que ce soit la suivante : l'enseignant doit apprendre à observer, à noter les résultats qu'il obtient ainsi et à les formuler. C'est la base des compétences qui lui permettent de mathématiser les situations et de saisir pleinement le nature du processus d'apprentissage (processus distinct de l'enseignement auquel il ne se réduit pas). En même temps qu'il est formé à observer, le maître doit acquérir une certaine connaissance pratique des techniques et des modes opératoires qu'implique la méthode expérimentale, notamment les techniques participatives qui se sont révélées particulièrement

adaptées aux collectivités ou aux groupes organisés. Il doit aussi posséder des notions d'anthropologie suffisantes pour devenir un observateur efficace de l'environnement social. Enfin, il convient qu'il soit formé de manière approfondie aux aspects essentiels de son métier. La connaissance des fondements de la psychologie, associée à l'observation et à l'évaluation constructive des situations pédagogiques, fournissent à l'enseignant une base solide pour interpréter et orienter le travail de ses élèves. En outre, la philosophie de l'éducation, l'analyse des valeurs, et l'étude des grands courants de la pensée contemporaine peuvent l'aider à assumer son rôle de guide et à définir le contexte conceptuel dans lequel s'inscrit sa tâche.

Références

CAMBRIDGE CONFERENCE ON SCHOOL MATHEMATICS, CAMBRIDGE, MASS., 1963. *Goals for School Mathematics; The Report of the Cambridge Conference on School Mathematics.* Boston, Houghton Mifflin, Co, 1963.

CASE, Robbie. 1981. Una teoría y tecnología evolutiva para el dessarrollo curricular. *Revista de tecnología educativa* (Trujillo, Pérou), Vol. 7, No. 1, pp. 9–35.

DAVIS, Robert. 1966. Discovery in the Teaching of Mathematics. Dans : Lee S. Shulman and Evan R. Keislar (dirs. pub.), *Learning by Discovery* : A Critical Appraisal. Chicago, Ill., Rand McNally.

DIENES, Zoltan P. (comp.). 1966. *Mathematics in Primary Education : Learning of Mathematics by Young Children.* Rédigé par l'International Study Group for Mathematics Learning, Palo Alto, Calif. Hamburg. Institut de l'Unesco pour l'Education.

DIENES, Zoltan P. 1971. *Building Up Mathematics.* 4ème éd., Londres, Hutchinson Educational.

EISNER, Wallace. 1979. Cinco concepciones curriculares. Caracas, Universidad Central (polycopié).

FREIRE, Paulo. 1977. *Pédagogie des opprimés.* Maspro, Paris.

GAGNÉ, Robert M. 1977. *The Conditions of Learning.* 3ème Ed., New York, Holt, Rinehart & Winston.

GAGNÉ, Robert M. ; BRIGGS, Leslie J. 1979. *Principles of Instructional Design.* 2ème Ed., New York, Holt, Rinehart & Winston.

MCNEIL, John D. 1977. *Curriculum : A Comprehensive Introduction.* Boston, Mass., Little, Brown & Co.

MESSINA, Graciela ; OTEIZA, Fidel. *Teoria de la inteligencia de Jean Piaget.* Caracas, Universidad Nacional Experimental Simón Rodríquez (en préparation).

MONTERO, P. ; OTEIZA, F. 1977. Determinación de un currículum mìnimo. Santiago, CIDE. (polycopié).

OTEIZA, Fidel, 1977. Una experiencia de desarrollo curricular : diseño y producción de un programa de matemática para adultos. *Educación hoy* (Bogota), Année VII, juillet– octobre, pp. 19–40.

OTEIZA, Fidel ; MESSINA Graciela. *Planificación del curriculum.* Caracas. Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez (en préparation).

PIAGET Jean, 1966. *Psychologie de l'enfant.* "Que sais-je ?", P.U.F., Paris.

TYLER, Ralph W. 1969. *Basic Principles of Curriculum and Instruction.* Chicago, Ill., University of Chicago Press.

Gerhard Walther

L'activité mathématique dans un contexte pédagogique : principes directeurs pour la formation en mathématiques des enseignants du primaire

Introduction

Beaucoup d'auteurs (voir, par exemple, la contribution de Hilary Shuard au présent volume) ont appelé l'attention sur le caractère systématique de l'éducation en général, de la formation des maîtres et de l'enseignement des mathématiques, ainsi que sur l'éventail "ouvert" des variables qui les déterminent, leur caractère interdisciplinaire et la complexité que cela confère à ces systèmes. Aujourd'hui, nous pouvons faire appel à une masse de données empiriques et à des théories issues de la recherche pédagogique, psychologique, sociologique, etc. appliquée à l'apprentissage et à l'enseignement des mathématiques. Cette situation inflationniste a donné naissance à une foule de nouveaux programmes, de revues de recherche et de revues qui s'adressent spécialement aux professeurs de mathématiques ainsi qu'à des centaines de livres portant sur les préoccupations professionnelles des enseignants.

Comment trouver un chemin approprié dans cette jungle ? Et qu'etend-on par "approprié" ? Ces questions concernent de façon cruciale le maître ou le futur maître et le responsable de leur formation. Quant à l'enseignant du primaire qui a, en général, la charge d'autres matières que les mathématiques, la situation actuelle est encore plus déroutante pour lui.

Une des stratégies choisies par de nombreux étudiants pour survivre dans cette jungle est l'adaptation totale au système. Malheureusement, ils n'adoptent pas cette stratégie parce qu'ils considèrent les connaissances théoriques comme utiles à leur futur travail professionnel, mais parce qu'ils peuvent ainsi être reçus aux examens et avoir un emploi. Il y a cependant des raisons plus profondes. On considère souvent les connaissances théoriques comme nuisibles ou gênantes pour instruire les enfants. Les futurs maîtres comptent donc davantage sur leur expérience pédagogique pratique, leur bon sens et leurs propres convictions relatives à l'enseignement et à l'éducation. Ils attendent de leurs cours de mathématiques qu'ils portent surtout sur les méthodes, qu'ils leur donnent

des "recettes" sur "la façon de présenter l'addition et la multiplication", etc. Ces attitudes sont révélatrices d'une compréhension insuffisante de la nature de l'éducation : l'imitation de modes opératoires est préférée à un véritable apprentissage, l'explication d'un procédé tient lieu d'enseignement. La notion d'explication est mal comprise. On croit qu'"atomiser" la matière enseignée en morceaux de connaissances de plus en plus petits aplanit les difficultés. Par ailleurs, les responsables de la formation eux-mêmes ont tendance à être fascinés par la pratique de l'enseignement, de sorte que l'action concrète risque de supplanter la réflexion théorique. Ce profond scepticisme à l'égard du savoir théorique se communique ensuite aux étudiants et les confirme dans leur propre attitude. Ces difficultés résultent principalement d'une conception naïve des connaissances théoriques et de leurs applications.

J. Tamburrini (1975) a analysé cette déficience dans le contexte de l'épistémologie génétique de Piaget et de ses implications pour l'enseignement. Elle écrit :

> Piaget parle beaucoup du deuxième principe, mal compris, suivant lequel la connaissance est une construction, et non une copie, de la réalité extérieure. D'ailleurs, de nombreux enseignants insistent sur le fait qu'ils ne fondent pas leur pratique sur l'idée empiriste que l'esprit de l'élève est une page blanche sur laquelle le maître peut écrire. Cependant, quand on se rend dans les classes, on découvre souvent une pratique qui indique qu'en réalité *ils partent de cette hypothèse*. Par exemple, on croit souvent qu'on ne succombe pas à cette tentation parce qu'on offre en abondance aux élèves un matériel concret et intéressant et qu'on leur donne la possibilité de l'explorer à diverses reprises. Cependant, si on examine les choses d'un peu plus près, on constate que l'enseignant suppose parfois que ce matériel donnant d'une certaine manière corps à un concept, il suffira de le présenter aux élèves pour qu'ils assimilent automatiquement ce concept.

Si on propose aux élèves de deuxième année du primaire de faire des formes amusantes avec des plaques congruentes carrées ou triangulaires, ils prendront plaisir à ce jeu. Mais la transmission de l'idée nouvelle, qui est le concept d'invariance, implique habituellement la médiation du maître, qui demande aux enfants de comparer le nombre de plaques contenues dans différentes mosaïques de même forme. Bien entendu, ce concept n'est pas enseigné de façon dogmatique, mais plutôt dans le contexte de la "mesure". Plus tard, la notion de "rapport" doit aussi être rendue vivante en classe. Ainsi, l'aspect social du savoir – le savoir en tant que savoir partagé – n'est pas négligé.

Il existe, à propos des applications de la théorie, une autre conception erronée qu'on pourrait appeler "l'optique algorithmique". Elle consiste à interpréter les notions théoriques comme des variables qu'on définit en introduisant les données relatives à une situation pour obtenir, d'une façon rigoureuse et directe, des règles d'action. En procédant

ainsi, on perd de vue certains faits épistémologiques, notamment le *processus* de transformation du "savoir que" en "savoir faire" (Gage, 1978; Skemp, 1979), transformation qui dépend du *contexte* d'application et qui, en général, exige du praticien un approfondissement de la théorie. En ce sens, les connaissances théoriques qui font partie du langage professionnel de l'enseignant fournissent une prise de conscience, un moyen d'orientation et des possibilités d'action. Il lui reste à s'acquitter d'une tâche difficile : appliquer son savoir théorique dans une situation d'exploration. Comment ce mode de connaissance peut-il être transmis à l'élève-maître ? Le projet international BACOMET (Basic Components in the Education of Mathematics Teachers) constitue, de ce point de vue, une entreprise remarquable. Son but est d'identifier les idées fondamentales que la formation des enseignants de mathématiques doit prendre en considération. L'expression "Basic Component" (élément fondamental) désigne une notion qui est :

Fondamentale, en ce sens qu'elle joue un rôle décisif dans l'activité des enseignants de mathématiques ;

Élémentaire, en ce sens qu'elle est accessible aux futurs maîtres (elle revêt donc un intérêt immédiat pour les étudiants qui souhaitent devenir professeurs de mathématiques ; elle les initie et les prépare à d'importantes fonctions pédagogiques et pratiques, leur donnant les motivations voulues et en leur permettant de se familiariser avec ces fonctions).

Exemplaire, en ce sens qu'elle illustre d'importantes fonctions pédagogiques et pratiques du maître et les relations entre ces fonctions.

Cette conception compète et globale des composantes de la formation des maîtres vise à fournir des orientations générales, une prise de conscience et les connaissances nécessaires à l'action. Elle est aux antipodes de la conception qui privilégie les "méthodes" et les "recettes". Cette dernière amène habituellement à apporter des "solutions" rigides et éphémères aux problèmes que le futur maître rencontrera par la suite en classe de mathématiques. En revanche, il est permis d'espérer que la première développera la faculté d'adaptation des maîtres, leur inspirera des stratégies axées sur l'innovation pédagogique et les incitera à poursuivre leur apprentissage.

La formation des professeurs de mathématiques est fortement tributaire, en particulier dans les pays en développement (voir, par exemple, les études de cas très instructives de P. Gerdes (1981) sur la situation au Mozambique et S. O. Ale (1981) sur le Nigéria), du contexte culturel, des traditions pédagogiques, des buts de la société, etc. Elle est subordonnée aux conditions locales dans tous les pays. En République fédérale d'Allemagne, par exemple, beaucoup de pratiques actuelles s'expliquent par la volonté de remédier aux déficiences de la réforme de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire,

entreprise en 1968. Mais, en plus des impératifs locaux, au moins deux autres facteurs importants ne devraient pas être perdus de vue : l'influence stimulante de pays voisins et le développement actuel de l'enseignement mathématique en tant que science, lié à une orientation professionnelle dans la formation des maîtres (Otte, 1979). Il existe néanmoins des préoccupations communes à tous les pays, comme le montrent les travaux d'Ale (1981). Dans son étude, il identifie quatre catégories de problèmes : ceux du maître, ceux de l'élève, ceux de la société et ceux qui sont relatifs aux ressources. En ce qui concerne les difficultés des élèves, il a constaté que dans un certain nombre de cas, elles provenaient en fait de leurs maîtres. Indépendamment de la médiocrité de l'enseignement, les élèves les ont attribuées à d'autres causes subtiles, et notamment :

Un découragement constant. Certains élèves se sont plaints de ne jamais arriver à résoudre par eux-mêmes un problème mathématique, sauf s'il s'agit d'un problème déjà résolu par le maître et qu'ils ont souvent appris par coeur.

L'absence de techniques de solution de problèmes.

Le manque d'aptitudes et de dons. La majorité des élèves pense qu'il faut être doué pour réussir en mathématiques. Quels que soient les efforts qu'on y consacre, il est impossible comprendre cette matière, si on n'est pas particulièrement doué.

La nature non-expérimentale des mathématiques.

Trop de formules incompréhensibles.

Trop de calculs.

Bien que ces plaintes aient été exprimées par des élèves du secondaire, elles témoignent de déficiences au niveau du primaire. Le malaise des élèves semble montrer que les maîtres ont une conception erronée du savoir mathématique, de sa transmission et de son acquisition. Un de nos buts essentiels, dans la formation des maîtres, est de leur fournir une orientation à cet égard. Avant de traiter ce point de manière plus détaillée, donnons, pour illustrer certaines de ces idées, un exemple de travaux pratiques effectués avec des élèves-maîtres dans une classe primaire.

Enseignement de la multiplication en troisième année

Les enfants étaient déjà familiarisés avec la multiplication par des nombres à un chiffre. Il s'agissait maintenant de présenter l'algorithme de la multiplication par des nombres à plusieurs chiffres. On commença par un problème en rapport étroit avec les études sur l'environnement que les enfants avaient effectuées peu de temps avant. Le problème était le suivant : combien d'heures ya-t-il dans une année ?

Les étudiants incitèrent d'abord les enfants à deviner le nombre.

Les réponses ainsi obtenues s'échelonnèrent entre 2 400 et 10 000. Qui avait donné la réponse la plus proche du résultat exact ? Comment pouvait-on trouver le nombre d'heures exact ? Il fallait multiplier 365 par 24 ! Comment pouvait-on faire ce calcul ? Pas de réponse. Essayez !

Etant donné ce qu'ils avaient fait auparavant, cette opération posait un problème aux élèves, parce qu'ils ne disposaient pas d'un algorithme immédiatement utilisable. Ils devaient donc construire un outil pour effectuer ce travail, en utilisant leurs connaissances préalables.

Dans l'enseignement traditionnel, le maître aurait expliqué l'algorithme de la multiplication au moyen d'exemples. Il en aurait exposé les règles, et, après quelque temps, les élèves auraient imité sa façon de procéder pour effectuer des opérations similaires. Mais, de cette façon, auraient-ils jamais réussi à saisir la signification de cet algorithme ?

Considérons ce qui s'est effectivement passé dans la classe. Presque tous les élèves ont fini par trouver la bonne réponse : 8 760 heures. Mais ce qui est intéressant, c'est qu'ils y sont parvenus par diverses voies qui se ramènent, essentiellement, à cinq démarches différentes.

Solution 1 : Emploi de l'addition uniquement, on écrit 24 fois le nombre de jours de l'année : 365, et on trouve le total : 8 760.

Solution 2 : On décompose le nombre d'heures d'une journée – 24 – en 10 + 10 + 4. On multiplie successivement le nombre 365 par 10, 10 et 4. On additionne les trois produits et on arrive à la réponse correcte.

Solution 3 : Ici on décompose 24 en 20 + 4. Ensuite, on multiple 365 par 20 et 4, et on additionne les deux produits.

Solution 4 : On décompose le nombre de jours de l'année en 300 + 60 + 5. On multiplie successivement 24 par 300, 60 et 5. On additionne les trois produits.

Solution 5 : Elle implique une double décomposition ! On décompose 365 en 300 + 60 + 5 et 24 en 20 + 4. On calcule les six produits : 300 x 20, 60 x 20, 5 x 20, 300 x 4, 60 x 4 et 5 x 4. On les additionne et on arrive à 8 760 !

A la fin de la leçon, les élèves-maîtres se sentaient contents. Les enfants étaient intéressés. Ils avaient appliqué leurs connaissances mathématiques pour se frayer leur propre voie vers la solution. Mais l'enseignante en titre ne partageait pas cet enthousiasme. "Où est la présentation de l'algorithme ?" objectait-elle. "Pourquoi avez-vous passé tout ce temps à regarder les élèves utiliser de "vieilles" recettes ? N'aurait-il pas mieux valu le consacrer à enseigner le nouvel algorithme ?" De fait, celuici n'avait pas été présenté. Mais comment pouvait-on mener la leçon à bonne fin ? Les étudiants proposèrent d'utiliser le travail que les enfants avaient déjà effectué. Cette suggestion fut acceptée. La leçon de mathématiques du lendemain aurait donc pour objectif de répondre à deux questions : par quels procédés les élèves avaient-ils effectivement

multiplié 365 par 24 ? Comment pouvait-on simplifier ce calcul ?

Dans la première partie de cette leçon, les enfants devraient discuter leurs solutions. Ils expliqueraient leur démarche. Ils découvriraient comment et pourquoi leurs différents calculs avaient fonctionné. Ils compareraient le temps que ces calculs avaient pris, l'effort qu'ils exigeaient, leur degré de simplicité, etc. Le maître animerait et organiserait cette discussion, mais en gardant une attitude réservée. Ensuite, l'algorithme classique serait présenté dans la seconde partie de la leçon comme une forme condensée de multiplication qui, loin d'être entièrement nouvelle, serait voisine des méthodes que certains élèves avaient eux-mêmes employées. Quant aux élèves dont la solution était plus "éloignée" de l'algorithme, ils ne seraient pas discrédités puisqu'ils avaient aussi trouvé le résultat correct et que leur contribution avait accru l'intérêt de la leçon.

Les élèves n'étaient pas accoutumés à ce mode d'apprentissage, mais ils s'y adaptèrent rapidement et participèrent à la discussion. Certains d'entre eux, par exemple, critiquèrent les solutions "compliquées". Ils dirent des choses comme : "Ce n'est pas la peine de calculer deux fois 365 x 10" (comme dans la solution 2); "Je peux le faire plus vite (365 x 20)". "C'est faux, tu n'as pas multipié" (à propos de la solution 1). Ici le rôle du maître est d'amener les enfants *à parler de* leurs activités antérieures et à y *réfléchir*. A ce méta-niveau, les élèves devraient aussi apprendre qu'une opération mathématique peut être effectuée de plusieurs façons très différentes. Ces démarches ne leur ont pas été proposées par les enseignants ou le manuel : ils les ont imaginées eux-mêmes. Cela leur montre aussi (et l'enseignant doit le mettre en lumière) que chaque élève peut apporter sa contribution au travail commun, et qu'ils peuvent apprendre les uns des autres. Le maître doit servir de médiateur entre le savoir individuel (les différentes façons de trouver la solution) et le savoir collectif nécessaire pour comprendre la nouvelle méthode mathématique (l'algorithme de la multiplication). Dans ce processus, le maître aide à établir des relations entre les divers modes de calcul (fragments de savoir) et le "nouveau" savoir. Le nouvel algorithme émerge ainsi d'un savoir partagé. Mais revenons à leçon. La discussion finit par tourner autour de la solution 3. Cette méthode paraissait la plus simple. En outre, les élèves se rappelèrent qu'ils avaient "déjà fait ce genre de multiplication". "Ne pourrait-on pas combiner les deux multiplications pour n'en faire qu'une seule ?" Un élève-maître posa ce nouveau problème. Au début, la seconde partie de la question dérouta beaucoup les élèves. Il finit par expliquer qu'il ne voulait "avoir que deux lignes (au lieu de trois) sous la barre de multiplication". Sans autre aide, plusieurs enfants trouvèrent l'algorithme habituel. Bien que ce compte rendu ne puisse donner qu'une vue partielle de tout ce qui s'est passé en réalité, il a peut-être fait ressortir certaines caractéristiques de l'enseignement des mathématiques. Il faut que les

enseignants aient une "perception" adéquate de la nature des mathématiques, et en particulier de l'activité mathématique. Dans le manuel traditionnel (employé à l'école primaire), l'opération "365 x 24" sert, dans le meilleur des cas, à présenter directement l'algorithme, ou fournit un exercice à effectuer *après* cette présentation. Pourtant, dans les "vraies" mathématiques, il est bien rare qu'on trouve, pour un problème nouveau, un moyen préétabli de la résoudre. Il en est de même dans la vie quotidienne. Quand un problème se pose, on doit y faire face de façon plus ou moins ingénieuse en utilisant les outils intellectuels et autres dont on dispose. Personne ne vous a montré auparavant comment traiter *ce* problème précis. Au cours de la leçon décrite, les élèves-maîtres ont suscité une véritable activité mathématique autour de données très ordinaires. Les enfants ont eu l'occasion de suivre des pistes divergentes, de découvrir des solutions spécifiques, de rompre avec les procédés de routine, d'élaborer et (ou) d'appliquer des stratégies heuristiques (par exemple, la décomposition du multiplicateur, la réduction de la multiplication à l'addition, etc.), de parler de leurs initiatives, d'y réfléchir et de discuter de leur bien-fondé. L'enseignant qui cherche à éduquer devrait miser sur la productivité mathématique des élèves, prendre leurs contributions au sérieux, et concevoir son rôle comme celui d'un médiateur entre le savoir mathématique individuel et les mathématiques traditionnelles dont il veut que les élèves aient en fin de compte la maîtrise. Ce rôle a été étudié, entre autres, par H. F. B. Griffiths (1975). J. Brophy (1981) a appelé l'attention sur les distorsions que peuvent susciter les directeurs d'établissement et de département de mathématiques, les parents, les maîtres et les élèves sur ces connaissances traditionnelles. Quelques principes directeurs importants pour la formation des maîtres du primaire à l'enseignement des mathématiques qui confèrent une portée plus générale aux points soulevés dans l'exemple précédent, sont examinés dans la section suivante.

Enseigner les mathématiques signifie faire des mathématiques avec les enfants dans un contexte pédagogique

Les enfants, de même que les adultes, inventent, appliquent et apprennent les mathématiques dans des contextes non pédagogiques. En voici quelques exemples très personnels. Ce sont des observations de ma fille Sabine, âgée de cinq ans, qui sont typiques dans leur genre.

Exemple 1 : Un jour, pendant que Maman se brossait les cheveux, Sabine prit deux petits livres de forme à peu près carrée. Elle les croisa l'un sur l'autre et s'exclama : "Regarde, c'est une vraie étoile".

Exemple 2 : Quelques jours plus tard, quand nous étions assis à table, elle demanda : "Quand la fête de l'école maternelle aura-t-elle lieu ?" Je répondis : "Dans quatre jours". Elle demanda ensuite : "Quel jour sommes-nous aujourd'hui, papa ?", "Jeudi". Alors, après un moment de profonde réflexion, elle dit : "Oh, Lundi, Lundi, je porterai mon masque de funambule".

Exemple 3 : Il y a quelques jours, en voiture sur l'autoroute, elle s'ennuyait. Une nouvelle fois, elle joua à compter les voitures avec ma femme. Elle voulait compter les voitures bleues. Ma femme choisit les blanches. Après un moment, Sabine prit soudain une feuille de papier. Elle dit : "Recommençons", et se mit à faire deux séries de bâtons pour représenter les voitures comptées par chaque personne.

Exemple 4 : Dans deux semaines, elle doit aller à l'hôpital. Cinq jours plus tard nous irons en visite chez sa grand-mère. Elle pose la question suivante : "Papa, c'est dans combien de jours l'hôpital ?". "Quatorze". Elle se met à compter à haute voix de un à quatorze. "Et grand-mère, c'est dans combien de jours ?". "Dix neuf". A nouveau, elle compte de un à dix neuf. "Ne pourrions-nous pas aller chez grand-mère avant l'hôpital ?".

Dans tous ces cas, Sabine a fait des mathématiques, intuitives, spontanées et même quelquefois sophistiquées. Mais ce n'était pas dans un contexte explicitement pédagogique comme à l'école, où l'activité mathématique est utilisée pour atteindre des buts éducatifs généraux. C'est cet objet particulier de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques à l'école qui les distingue d'autres contextes où les mathématiques interviennent, comme celui de la recherche ou celui de leurs applications. Le maître devrait donc être conscient du fait que, dans la plupart des cas, les mathématiques scolaires constituent une *simulation* des "vraies" mathématiques. Les enfants qui cherchent à savoir, par exemple, combien cela coûte d'avoir un chien (Tammadge, 1971) doivent apprendre, entre autres, que les mathématiques peuvent être utilisées pour construire un modèle représentant une situation, pour traiter les données du modèle, pour prévoir quelque chose (par exemple, les coûts en question) et pour prendre, à partir de là, des décisions. Bien que cet excellent exercice semble tiré directement de l'environnement de l'enfant, le maître ne devrait pas perdre de vue que la question posée ne constitue qu'un aspect de nombreuses situations "réelles" différentes. Elle pourrait s'inscrire dans un contexte statistique ou être liée à d'autres enjeux, comme choisir entre faire des dons à des institutions charitables ou entretenir un chien, ou encore entre un teckel, un chat et une perruche, ou simplement montrer au petit Jean qu'avoir un chien c'est amusant, mais que cela coûte de l'argent. Une personne qui désire connaître le coûte de l'entretien d'un chien dans sa situation et dans un but personnel précis n'ira sans doute pas imaginer d'autres situations ou d'autres buts. Ce serait compliquer les choses à plaisir. Dans un contexte pédagogique,

au contraire, il faut faire varier les paramètres relatifs à la situation et au contexte, de manière que les élèves prennent conscience de la diversité des questions qui peuvent se poser.

"Faire des mathématiques dans un contexte pédagogique" présente aussi des aspects sans équivalents dans d'autres contextes mathématiques. Un de ceux-ci, et non des moindres, est la nécessité de s'exercer aux manipulations de routine. Quels sont donc les élements communs à la pratique des mathématiques à l'école et ailleurs ? H. Winter (1975) a étudié ce problème dans la large perspective des objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques et a ainsi mis en évidence les relations profondes qui existent entre les caractéristiques anthropologiques, épistémologiques et socio-éducatives de l'homme et les mathématiques. Cette analyse l'a conduit à énoncer quatre conditions d'un enseignement valable des mathématiques : donner aux élèves la possibilité d'agir d'eux-mêmes, de participer à des discussions rationnelles, de se rendre compte de l'utilité des mathématiques et d'acquérir des compétences formelles.

Selon une suggestion de E. Wittmann (1981*b*), la dernière condition a trait à l'apprentissage des faits et des techniques et algorithmes mathématiques fondamentaux, alors que les autres entrent dans la catégorie des *stratégies cognitives*. Il est important, dans notre contexte, de décrire ces stratégies du point de vue de l'activité de l'élève, car elles constituent les éléments invariants du processus de médiation que nous recherchions. Ainsi, par "agir de lui-même", on entend que l'élève devrait travailler en explorant et en construisant, c'est-à-dire observer (les relations, les configurations, les structures), faire à partir de là des conjectures, expliquer ces observations et ces conjectures, examiner des cas particuliers "éclairants" (afin de mettre en lumière les aspects généraux), faire des plans pour parvenir à des solutions, formuler des raisons de procéder comme il le fait, organiser le travail mathématique (par exemple en combinant des solutions partielles), généraliser, recourir à des analogies, aller au-delà des données et de l'information fournies, imaginer des variations de la situation "donnée", et susciter des problèmes connexes (ou "nouveaux").

"Participer à des discussions rationnelles" signifie que l'élève apprend à débattre de résultats mathématiques, les comparer et les évaluer, à donner des exemples et des contre-exemples, à vérifier des propositions générales, et à donner des raisons, des preuves, etc.

Pour "se rendre compte de l'utilité des mathématiques", les élèves devraient apprendre à mathématiser des situations (dans le cadre des mathématiques et en-dehors). Ils devraient donc décrire et représenter des situations par des moyens mathématiques, rassembler des données (en mesurant, en estimant, etc.), concevoir des modèles mathématiques, traiter l'information et interpréter des données, des solutions, etc.

Les mathématiques ont de nombreux aspects. A l'école primaire, il

est particulièrement important de les considérer, pour reprendre la formule de G. Polya, comme des "mathématiques en train de s'élaborer". Quand on fait des mathématiques avec les enfants dans un contexte pédagogique, on doit donc avoir pour objectif de développer des stratégies cognitives. Il en résulte au moins trois conséquences importantes pour la formation des maîtres. Il faut donner aux futurs maîtres la possibilité de faire des mathématiques dans le même esprit. Il faut qu'ils réfléchissent sur leurs activités et qu'ils apprennent ainsi à susciter en classe des stratégies cognitives. Dans notre exemple, nous avons déjà évoqué plusieurs conditions qui doivent être remplies pour impulser des stratégies cognitives. Elles sont récapitulées ci-après. Le contenu de l'enseignement des mathématiques devrait être présenté par l'intermédiaire de *problèmes*. Le maître devrait contribuer à rendre ces problèmes accessibles, en tenant compte de l'état du développement cognitif des enfants. La stimulation de l'activité par des "tâches" constitue une caractéristique typique du contexte pédagogique. Dans le passé, les exercices de routine prédominaient. Actuellement, on emploie la "tâche" plus délibérément, et elle est l'objet de recherches pédagogiques. Pollack (1970) et Avital et Shettleworth (1968) nous ont familiarisés avec les types suivants de tâches non routinières : les problèmes ouverts et les problèmes-défis. Dans le premier cas, les éléments du problème sont assez vagues et incomplètement explicités. Diverses démarches sont possibles pour le résoudre. Il faut souvent découvrir les données et les informations nécessaires, comme dans "combien cela coûte-t-il d'avoir un chien ?" Dans les problèmes-défis, les méthodes et les connaissances dont on dispose permettent seulement de comprendre le problème et de le traiter de façon partielle et sommaire. Avital et Parness (1978) ont analysé un autre type de problème intéressant, qu'ils appellent "problème exploratoire". Bien que ces catégories de problèmes ne puissent être entièrement dissociées, le maître devrait être conscient de leur potentiel pédagogique. Ils permettent de rompre la monotonie des exercices de routine, et de faire entrer dans la classe une bouffée d'activité mathématique réelle.

Avital et Parness donnent sept critères pour définir les problèmes exploratoires :

Le problème doit se prêter à une recherche inductive : l'élève doit voir immédiatement que c'est en recueillant (et en produisant) des données qu'il pourra avancer vers une solution, ou une proposition.

Il faut que la solution du problème constitue pour l'élève un but dont l'attrait l'encourage à l'effort.

La collecte des données elle-même peut présenter divers niveaux de difficulté, de façon à donner à l'élève un sentiment de réussite au fur et à mesure qu'il les accumule.

On peut formuler des objectifs partiels, de difficulté graduellement croissante, de telle sorte que chaque enfant puisse apporter une

contribution et reçoive, à son niveau de capacité, un encouragement.
Quand il cherche à mieux cerner le problème en rassemblant des données, l'élève s'exerce à une technique importante.
Certains objectifs partiels peuvent être atteints rapidement. On peut ajouter une exigence supplémentaire pour assurer que l'exploration porte sur un véritable problème et non sur une devinette isolée.
Le problème peut être élargi de manière à créer de nouveaux objectifs.
La littérature spécialisée offre de nombreux exemples de problèmes exploratoires. Les suivants peuvent être cités à titre d'illustration :
Peut-on écrire le nombre "100" comme une somme d'entiers consécutifs (ne commençant pas nécessairement par 1) ?
Choisir un nombre de deux chiffres quelconque (on peut facilement transformer un nombre à un chiffre en un nombre à deux chiffres en ajoutant un zéro). Calculer le produit de ses chiffres. Répéter ce processus. Que se passe-t-il ?
Les élèves les plus grands de la classe sont-ils aussi les plus lourds ?
Tracer un polygone convexe et le trianguler. Existe-t-il des relations entre le nombre de ses sommets, de ses diagonales et de ses triangles ?

On a vu (septième critère) que les problèmes exploratoires pouvaient être élargis de manière à susciter de nouvelles questions connexes et à ouvrir de nouvelles voies de recherche. Brown et Walter (1970), Wittman (1971) et Polya (1966) ont suggéré à cet effet des méthodes appropriées. Le maître devrait, en outre, encourager les réflexions divergentes, les conflits cognitifs, les procédures heuristiques, les arguments intuitifs, la discussion et une attitude constructive à l'égard des erreurs. Le problème du nombre d'heures de l'année fournit un exemple simple de procédure heuristique : l'élève-maître a demandé aux élèves qui avaient déjà achevé leur tâche de calculer le nombre d'heures d'une année bissextile. Certains d'entre eux ont entièrement recommencé leurs calculs. D'autres ont utilisé les résultats du problème précédent, méthode heuristique importante qui a pu ensuite être explicitée au profit de toute la classe au cours de la discussion.

Comment les futurs maîtres peuvent-ils être préparés à faire des mathématiques avec les élèves ?

Il y a une vingtaine d'années, G. Polya (1963) dans "On Learning, Teaching, and Learning Teaching" a présenté l'enseignement "comme un art" et tracé un cadre de formation des maîtres où la responsabilité de l'acquisition des connaissances nécessaires pour l'action est essentiellement laissée au futur enseignant. En plus des recommandations officielles de la Mathematical Association of America, Polya a proposé que :

La formation des professeurs de mathématiques comporte un élément de travail indépendant et créatif, à un niveau approprié, dans le cadre d'un séminaire sur la solution de problèmes ou par tout autre moyen qui s'y prête ;

La pédagogie ne soit enseignée qu'en relation étroite avec le contenu mathématique ou avec les travaux pratiques d'enseignement et, si possible, par des professeurs qui ont fait de la recherche mathématique et ont l'expérience de l'enseignement.

Pour la formation des instituteurs aux mathématiques, ces propositions paraîtront peut-être trop exigeantes et ambitieuses. Il me semble toutefois que si ces principes ne sont pas appliqués à la lettre lors de cette formation, elle devrait au moins s'en inspirer. Cela implique que le maître devrait faire des mathématiques et que son enseignement devrait en porter la marque. En ce qui concerne la deuxième proposition de Polya, Fruedenthal propose une méthode plus réaliste, qui s'accorde mieux avec les impératifs de la formation des enseignants du primaire :

Les transformations à opérer dans la formation des maîtres du primaire exigent une intégration radicale de l'enseignement des disciplines et de leur didactique, ce qui suppose que les questions apprises par les futurs maîtres soient assez proches de celles qu'ils enseigneront pour permettre cette intégration compléte.

La conception pragmatique de la formation des maîtres exposée par Polya a été reformulée en termes percutants par Halmos (1975) :

Le meilleur mode d'apprentissage est l'action – poser des questions et agir. Le meilleur enseignement est celui qui amène les élèves à poser des questions et à agir. N'inculquez pas des notions, incitez à l'action.
Le meilleur moyen de former des enseignants est de les amener à poser des questions et à entreprendre des choses afin, qu'à leur tour, ils puissent amener leurs élèves à poser ces mêmes questions et à faire ces mêmes choses.

A part quelques efforts, résolus mais localisés, les idées de Polya sur la formation des maîtres sont encore loin d'être largement appliquées. A première vue, cela semble en contradiction avec l'énorme littérature consacrée, au cours des vingt-cinq dernières années, à la solution de problèmes. Cependant, si on lit, par exemple, le rapport du Groupe d'étude : *Problem Solving, Teaching Strategies and Conceptual Development* du Congrès international sur l'enseignement mathématique de 1976, ou l'article publié par Krulik et Reys (1980) dans le NCTM Yearbook sur "la solution de problèmes en mathématiques scolaires", on constate que c'est sur "la solution de problèmes en classe" que se concentrent l'intérêt et la recherche. De ce fait, les élèves-maîtres sont laissés pour compte. Il n'est pas suffisant, et je tiens à insister encore sur ce point, de leur présenter de manière théorique l'enseignement orienté vers les problèmes (ses conditions, ses caractéristiques, ses

possibilités, ses difficultés, etc.). Ce qu'il faut, c'est assurer une formation telle que cette orientation et "la pratique des mathématiques avec les enfants" deviendront un aspect fondamental du rôle de l'enseignant – une composante de sa personnalité et un élément essentiel de sa vie professionnelle.

A l'Institut pour l'enseignement des mathématiques de Kiel, la formation des étudiants commence par un cours d'initiation de deux semestres. Ce cours débute par le problème classique de Polya : "En combien de régions cinq plans découpent-ils l'espace ?". J'ai choisi ce problème parce que je peux être raisonnablement sûr qu'aucun des 200 débutants ne le connaît. S'atteler à le résoudre sera donc une expérience nouvelle. De plus, nous disposons du film de Polya intitulé *Let's teach guessing*. On y voit Polya travailler avec un groupe d'étudiants en mathématiques auxquels il a posé ce problème. Nos étudiants y trouvent donc un reflet de leurs propres efforts et de leurs propres erreurs. Cela me donne aussi l'occasion de présenter Polya, certaines idées sur l'heuristique (qui peuvent être illustrées par le travail auquel les étudiants viennent de se livrer) et sur les conceptions de Polya en matière d'apprentissage, d'enseignement et de formation des maîtres, et quelques notions générales sur le développement de la connaissance, liées aux noms de Piaget, de Popper et de Lakatos. A la fin de cette unité, les élèves doivent étudier un bref article de Polya sur l'enseignement de la solution de problèmes. Cet article est ensuite discuté par groupes de trente à cinquante étudiants, à la lumière de leurs propres souvenirs de l'école.

La plupart des étudiants semblent désarmés face au problème. Certains peut-être, recherchent une formule, puisque d'autres font expressément remarquer qu'il n'y en a pas. Certains étudiants simplifient le problème en supposant que les plans sont parallèles. Il faut donc décortiquer le problème lui-même. Quelles hypothèses peut-on faire ? Quand on s'est accordé sur le fait que les plans sont en position générale, comment peut-on trouver le nombre de régions ? Manifestement, un long passé de mathématiques scolaires a fait perdre aux étudiants l'habitude de deviner ou de formuler des hypothèses. Il faut donc la leur redonner. De nombreux étudiants se sentent mal à l'aise quand ils ont dit quelque chose d'erroné. Mais lorsqu'ils commencent à avoir l'impression que le nombre de régions de l'espace est déterminé par la loi 2^k (k représentant le nombre de plans), les étudiants sont soudain encouragés à indiquer ce qu'ils croient être le nombre de régions, même pour neuf plans ou plus.

Il faut toujours tester les conjectures. Un dénombrement systématique est nécessaire à partir de trois plans. Quelle déception quand il s'avère que quatre plans ne partagent l'espace qu'en quinze régions ! Sans dénombrement, la plupart des étudiants n'arrivent pas à le croire. L'hypothèse séduisante suivant laquelle "tout nouveau plan coupe en

deux chacune des régions précédentes" s'est révélée fausse !

Cette hypothèse résulte évidemment de l'assimilation de chaque nouvelle division de l'espace à un "partage en moitiés", schéma mental qui est contredit par la réalité. Cette contradiction ne peut être surmontée qu'en adaptant ce schéma à la réalité. Il n'est pas illégitime de s'y tenir car il fonctionne de 0 à 3 plans et il rend compte, en fait, de ce qui se passe. Le commentaire de Ginsburg sur les erreurs des élèves mérite d'être rappelé à ce propos :

> Il est fréquent qu'elles soient logiques, qu'elles obéissent à des règles et qu'elles découlent de fondements sensés. Il ne semble pas qu'on aide les élèves en disant le contraire et il n'est assurément d'aucun secours de trop les imputer au manque d'intelligence, à des difficultés d'apprentissage, etc.

Pour surmonter cette contradiction, on peut se pencher sur des problèmes analogues : "En combien de parties cinq droites partagent-elles un plan (ou cinq points une droite) ?"

Ce problème peut aussi être résolu par des méthodes routinières d'analyse combinatoire que les étudiants ne connaissent évidemment pas. Nous utilisons une "solution situationnelle" qui résulte très naturellement de l'hypothèse formulée par les étudiants.

Procéder ainsi appelle également l'attention sur un mode important d'enseignement et d'apprentissage.

Pour adapter le schéma de division en deux, on pourrait se demander ce que devient le nombre de régions de l'espace si on ajoute aux trois plans déjà présents un quatrième plan en position générale ? On pourrait se représenter les trois plans comme formant une tente, ou comme définissant un coin de la salle. Nous savons déjà que les trois plans divisent l'espace en huit régions. On peut se représenter le quatrième plan comme le sol de la tente. Ce plan ne coupe pas en deux chacune des huit régions. Il ne coupe en deux que celles qu'il traverse. On peut compter ces régions en dénombrant celles où le *plan* supplémentaire est fractionné par les trois plans initiaux ou par les trois droites d'intersection avec ces plans. Trois droites divisent généralement un plan en sept régions. Donc, pour quatre plans, nous avons $8 + 7 = 15$ régions de l'espace (et non $2 \times 8 = 16$).

Jusqu'à présent, nous avons travaillé sur un exemple unique, qui nous a permis de déterminer et d'expliquer le nombre que nous cherchions, en l'occurence 15.

Quand on réfléchit à cette démarche et à ses résultats, et qu'on se rappelle la question posée "Que se passe-t-il . . . si . . . ?", on constate que cette démarche est valable non seulement dans ce cas particulier, où on part de trois plans, mais aussi dans *tous* les autres cas. En d'autres termes, le problème général a été éclairé par un exemple représentatif

(Walther 1979, Semadeni 1981). Ce type d'exemple fournit une stratégie pour traiter le problème général. Halmos rapporte la phrase suivante de Hilbert :

> La meilleure façon de comprendre une théorie est de trouver, puis d'étudier, un exemple concret d'application de cette théorie qui serve en quelque sorte de prototype, un exemple fondamental qui illustre tout ce qui peut se passer.

Les abstractions ne se dégagent généralement pas des objets par eux-mêmes, mais, essentiellement, des invariants liés aux opérations effectuées sur ces objets. Piaget donne aux abstractions de ce type, qui jouent un rôle important en mathématiques, le nom d'*abstraction réflexive* (voir Wittmann, 1981*a*).

La question "Que se passe-t-il . . . si . . . ?" est intrinsèquement liée au "principe opératoire" de l'apprentissage et de l'enseignement. Ce principe reposait initialement sur des aspects fondamentaux de la théorie de Piaget, insérés par la suite dans le vaste contexte épistémologique des "programmes opératoires" (Wittmann, 1981*a*).

L'emploi d'exemples représentatifs dans l'enseignement et l'apprentissage a des avantages évidents. Ces exemples peuvent être des objets concrets comme des boutons, des tiges de Cuisenaire, des plaques, des miroirs, etc. Mais ils doivent être génériques, c'est-à-dire ni trop simples ni trop compliqués, et ne présenter aucune caractéristique extrême. En restant dans ces limites, on peut se dispenser des mécanismes formels nécessaires pour représenter l'abstraction (dans le cas que nous avons choisi, une relation de récurrence). Cela permet, néanmoins, de discerner et de comprendre des structures. Il n'est donc pas nécessaire d'aborder la représentation formelle avant que l'élève ait appréhendé la situation.

Le recours à des exemples représentatifs est attesté depuis fort longtemps. Le célèbre théorème d'Euclide : "Il y a plus de nombres premiers que dans toute énumération de nombres premiers donnés" (Livre IX, Proposition 20), est démontré pour un ensemble de trois nombres premiers a, b et c : ou bien $(a \times b \times c + 1)$ est un nombre premier différent de a, b et c, ou bien $(a \times b \times c + 1)$ a un diviseur premier différent de a, b et c.

Simon Stevin dans son livre *La Disme* a systématiquement utilisé des exemples représentatifs pour étudier les faits d'ordre général qui découlent de la théorie des fractions décimales. Il est intéressant d'analyser sa méthode. Dans la section intitulée "Proposition", il a énoncé le problème suivant : "Calculer la somme des trois nombres décimaux ci-après : 27,847; 37,675 et 875,782 (suivant la notation actuelle).

Dans la section intitulée "Construction", il a décrit la méthode utilisée pour additionner ces fractions décimales : "disposer les nombres

comme sur la figure ci-jointe, les additionner comme on le fait habituellement pour les nombres entiers . . ." La "figure" montre l'agencement vertical que nous enseignons traditionnellement aux élèves, avec les chiffres des unités, des dixièmes, etc. dans la même colonne. La "preuve" est donnée en convertissant les nombres en fractions ordinaires et en les additionnant selon les règles habituelles.

Donnons maintenant deux exemples tirés des mathématiques enseignées à l'école primaire. Premièrement, en représentant le produit de deux nombres naturels m et n comme la superficie d'un rectangle, on peut mettre en évidence le principe de commutativité. On peut, par exemple, représenter le produit de 5 et 3 par une carte longue de 5 unités et large de 3. En faisant subir à cette carte une rotation de quatre-vingt-dix degrés, on "montre" que $5 \times 3 = 3 \times 5$. Il n'est pas nécessaire de formuler expressément cette démonstration. Des expériences simples de rotation montrent que la superficie du rectangle ne varie pas, quelle que soit l'orientation de celui-ci.

Deuxième exemple : la relation $(m+n) = (m+t) + (n-t)$, où $t \leqslant n$, et m, n et $t \epsilon N$ (qui est importante pour simplifier l'addition des nombres naturels) peut être illustrée par l'exemple représentatif :

$$(8+3) = (8+2) + (3-2)$$

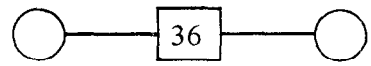
de la façon suivante : on place bout à bout une tige de longueur 8 et une tige de longueur 3. On peut alors "voir" que (8+2) plus (3-2) est égal à (8+3).

L'emploi d'exemples représentatifs permet de donner une démonstration formelle qui peut être plus facilement appréhendée et assimilée. Il constitue un mode d'élaboration d'énoncés généraux qui fournit un outil puissant pour élargir le champ d'application des mathématiques.

Revenons maintenant à notre problème initial, la division de l'espace par des plans, et examinons le rôle qu'il lui reste encore à jouer dans notre cours de formation des maîtres. Dans le présent chapitre, j'ai déploré à diverses reprises la division du savoir pédagogique en compartiments distincts étiquetés : contenu, méthodologie, psychologie, épistémologie, théorie de l'éducation, etc. Je n'ignore pas que cette division du travail, qui est ensuite imposée à la formation des maîtres, est imputable à la spécialisation dans les diverses sciences qui font l'objet d'activités d'enseignement et de formation des maîtres. Je ne m'oppose pas non plus aux cours spécialisés, parce que personne ne peut être expert dans tous ces domaines. Mais c'est généralement à l'étudiant lui-même qu'est laissé le soin d'intégrer les éléments et aspects distincts du savoir pédagogique en un ensemble qui les englobe tous. Pour remédier à cette situation, il faudrait que les cours de formation des maîtres contiennent des *unités intégratrices*. Le problème décrit ci-dessus en est un exemple. Dans la formation à l'enseignement des mathématiques, il convient de choisir une question d'ordre mathé-

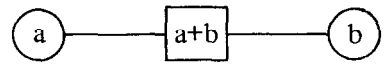
matique (un problème) comme noyau de cette unité intégratrice. Freudenthal recommande de choisir des problèmes se rapportant aux mathématiques enseignées à l'école primaire, qui sont assez riches et souples pour servir également de point de départ à la formation des élèves-maîtres. Examinons, à titre d'illustration, l'unité intégratrice des "arithmochaînes". McIntosh et Quadling (1975) ont inventé les "arithmogones". Ce sont les formes fermées des arithmochaînes. L'expérience a montré que les chaînes sont plus faciles à explorer et conviennent donc mieux que les arithmogones.

Les arithmochaînes courtes sont du type suivant :



5 31
12 24

Ici, le nombre d'entrée 5 produit à la sortie le nombre 31, et le nombre d'entrée 12, le nombre de sortie 24. La règle générale de construction est donc



Ces chaînes permettent de poser diverses questions :

Le nombre de sortie peut-il être égal au nombre d'entrée ?

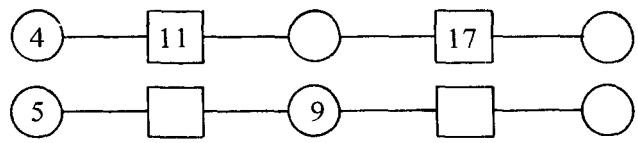
Que devient le nombre de sortie si on augmente (ou diminue) le nombre d'entrée de 2, 3 . . ?

Montrer ce qui se passe à l'aide de jetons ou graphiquement.

Que deviennent les nombres d'entrée/sortie si on modifie le nombre inscrit dans le rectangle (en l'augmentant/diminuant ou en le multipliant/divisant) ?

Deviner des relations.

On assemble ensuite les chaînes courtes :



Remplir les blancs en appliquant la règle.

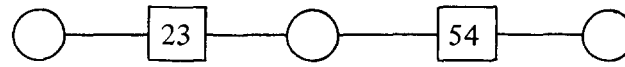
Pouvez-vous mettre trois nombres dans d'autres cases vides, de manière que les deux nombres manquants soient uniquement déterminés ?

Combien y-a-t-il de cas différents ?

Construire d'autres arithmochaînes à deux rectangles contenant trois nombres ou moins, de telle sorte qu'au moins un des nombres

manquants ne puisse être uniquement déterminé.

Désormais, nous considérons des chaînes où tous les rectangles sont remplis :

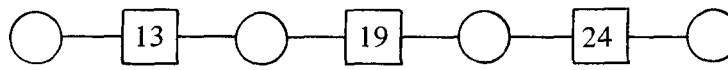


Quel nombre de sortie obtient-on avec 5 en entrée ?
Le nombre de sortie peut-il être égal au nombre d'entrée ?

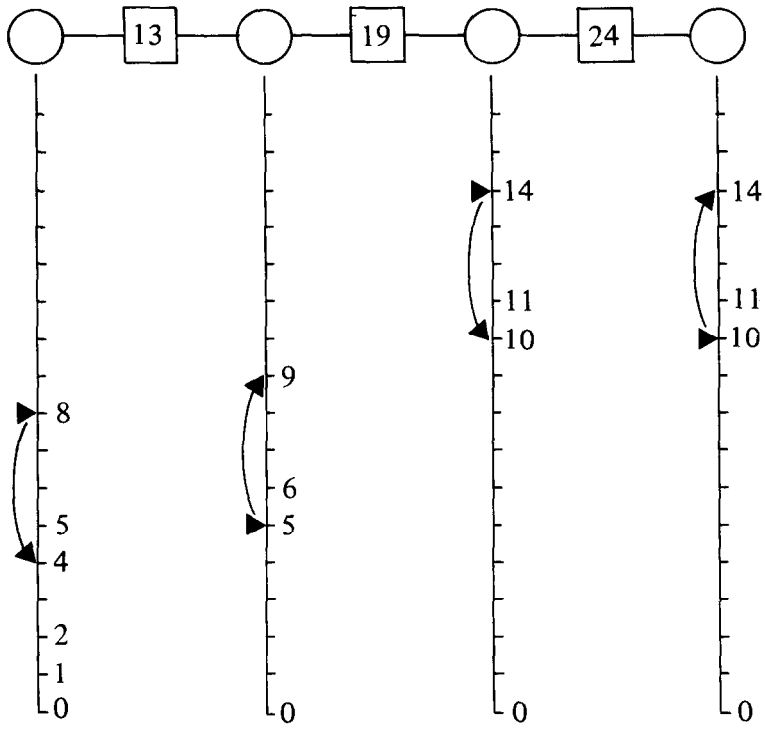
Certains d'entre vous utiliseront sans aucun doute des équations, mais les élèves de troisième et de quatrième années ne connaissent généralement pas cette technique.

Essayez d'explorer la situation de façon quasi-empirique.
Choisissez plusieurs nombres d'entrée.
Que deviennent les nombres dans les autres cercles ?
Construisez une table.
Y voyez-vous une structure ?
Que devient le nombre de sortie si on augmente ou si on diminue le nombre d'entrée d'une certaine quantité ?
La structure dépend-elle des données ? (Ici, la différence entre le nombre de sortie et le nombre d'entrée est égale à la différence entre le nombre placé dans le second rectangle et celui qui se trouve dans le remier).
Essayez de justifier vos conjectures.
Une arithmochaîne est dite résoluble s'il existe un nombre d'entrée égal à son nombre de sortie.
Les arithmochaînes à deux rectangles sont-elles résolubles ?
Essayez de caractériser les arithmochaînes à deux rectangles résolubles.

Comment peut-on résoudre les arithmochaînes à trois rectangles telles que celle ci :



En classe, j'utilise un tableau magnétique pour faire apparaître les relations entre les divers nombres qui interviennent, de la façon suivante :



Les nombres situés à l'intérieur des cercles peuvent être représentés par des repères colorés placés sur les droites verticales graduées. Ce dispositif permet d'étudier la *dynamique* des relations entre les nombres, en particulier si on charge quatre enfants de déplacer les repères (un pour chaque droite).

Je pose la question suivante : "Qu'observez-vous en regardant les nombres d'entrée et de sortie ?" Quelquefois, il faut donner une indication, qui prend la forme d'une tâche connexe : "Jean a quatre billes, Marie en a quatorze. Combien de billes Marie doit-elle donner à Jean pour qu'ils en aient autant l'un que l'autre ?" Cette situation véhicule l'idée de moyenne arithmétique qui fournit finalement une solution pour notre arithmochaîne :

Peut-on trouver un nombre d'entrée simple avec lequel le nombre de sortie fournit une solution approchée de la chaîne à trois rectangles ci-dessus ? (Prendre 0 ou 13).

Pour les élèves-maîtres : comment peut-on montrer à l'aide d'un exemple représentatif que toute chaîne à trois rectangles est résoluble ?

Décrivez votre stratégie avec des variables.
Commentez la façon de procéder dans les classes primaires.
Intentionnellement, nous n'avons pas précisé le domaine de variation des nombres. Ainsi, les élèves choisissent fréquemment 15, par exemple, comme nombre d'entrée dans la chaîne ci-dessus. Quel est alors le nombre dans le deuxième cercle ? Dans notre programme scolaire, on n'introduit officiellement les nombres négatifs qu'en huitième année. Cependant, voilà un bon moyen de les introduire informellement, grâce au principe de permanence (Freudenthal parle de "méthode inductive – exploratoire").

L'étape suivante est l'étude des chaînes à quatre rectangles ! Les étudiants travaillent alors comme des écoliers. Les difficultés qu'ils éprouvent leur permettent de pressentir celles qu'éprouveront leurs élèves. Mais ils vont un peu plus loin. Certaines questions sont explicitées et débattues : la notion de généralité, les caractéristiques des chaînes résolubles, l'emploi de variables, les arithmochaînes comme fonctions ayant certaines propriétés, l'application du principe opératoire, l'utilisation de matériel pédagogique, etc. Le niveau mathématique peut être encore élevé quand les étudiants se sont familiarisés avec le comportement des arithmochaînes de longueur donnée. Ils formulent et démontrent une hypothèse générale sur la possibilité de résoudre les chaînes à quatre rectangles.

Il existe une autre voie que les étudiants peuvent explorer. Dans le passé, mes étudiants et moi-même avons procédé à plusieurs reprises à des expériences d'étude de cette question dans les classes primaires et nous avons fait plusieurs enregistrements vidéo. Ces enregistrements peuvent être analysés avec de nouveaux étudiants qui sont ainsi en mesure de se rendre compte des initiatives du maître et de celles des élèves, et d'identifier divers éléments de la pédagogie. En utilisant cette unité intégratrice, les étudiants apprennent à planifier leurs cours, à élaborer des exercices, à utiliser divers matériels d'enseignement, à se servir de fiches de travail (ou d'une page de manuel), à déterminer les techniques arithmétiques spécifiques intervenant dans l'étude d'une question, etc. Il est convenu qu'au moins certains des étudiants expérimenteront finalement leur travail en classe et que les autres apporteront un concours en analysant les enregistrements vidéo. La question choisie peut aussi être utilisée pour initier les étudiants aux observations "cliniques" portant sur un élève donné. Ils apprennent à examiner avec soin comment un élève travaille, à intervenir si nécessaire, à analyser et expliquer les processus en jeu. Ce type de travail (dont on trouve de nombreux exemples dans *The Journal of Children's Mathematical Behavior*) contribue à ouvrir l'esprit des étudiants à la dimension humaine de l'enseignement et de l'apprentissage.

Conclusion

Ce cours, que nous appelons "Introduction à l'enseignement des mathématiques", ne se limite pas aux thèmes et aux aspects décrits ci-dessus. D'autres y sont intimement mêlés : la construction de modèles mathématiques (en particulier à propos des "problèmes verbaux"), le rôle et le diagnostic des erreurs (essai d'explication théorique de certains types d'erreurs), des rudiments de psychologie de l'apprentissage des mathématiques, des textes sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, le rôle des concepts, les processus d'enseignement-apprentissage (par exemple, les structures de communication), etc. On dispose de plusieurs manuels qu'il faut néanmoins adapter, à divers points de vue, aux besoins spécifiques des enseignants du primaire. Citons ceux de Farell et Farmer (1980), Wain et Woodrow (1980) et Wittman (1981*b*).

Ces autres thèmes ne sont pas, bien entendu, examinés en détail. Mais ils contribuent à l'objectif général du cours, qui est de faire naître un intérêt profond pour l'enseignement des mathématiques, et d'aider des étudiants à se forger leur propre "optique interprétative". Cette orientation est confirmée par un article récent de Kilpatrick (1981), où diverses considérations sont avancées pour expliquer "l'inefficacité raisonnable des recherches sur l'enseignement des mathématiques". Une de ses suggestions est qu'il faut prendre la théorie au sérieux et considérer les enseignants comme des participants à la recherche. Cela s'applique par analogie à la formation des maîtres, si on admet que la recherche et l'enseignement universitaire forment un tout indissociable.

Références

ALE, S. O. 1981. Difficulties Facing Mathematics Teachers in Developing Countries – A Case Study of Nigeria. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12 No. 4, pp. 479–89.

AVITAL, S. ; PARNESS, Z. 1978. Exploratory Problems in Elementary School Mathematics : A Study of Learning and Retention. Dans : *Proceedings of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Osnabrück, pp. 9–26.

AVITAL, S. ; SHETTLEWORTH, S. 1968. Objectives for Mathematics Learning. *Ontario Institute for Studies in Education, Bulletin 3* (Toronto).

BROPHY, J. 1981. Determinants of the Content Taught in Mathematics Classrooms. (Article pour la réunion BACOMET, Fredonsborg, Danemark).

BROWN, S. I. ; WALTER, M. I. 1970. What-if not ? An Elaboration and Second Illustration. *Mathematics Teaching,* No. 51, été, pp. 9–17.

FARELL, M. A. ; FARMER, W. A. 1980. *Systematic Instruction in Mathematics for the Middle and High School Years.* Reading, Mass., Addison-Wesley.

GAGE, N. L. 1978. *The Scientific Basis of the Art of Teaching.* New York, Teachers

College Press.

GERDES, P. 1981. Changing Mathematics Education in Mozambique. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 12, No. 4, pp. 455–77.

GRIFFITHS, H. B. 1975. Mathematics Education to-day. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* Vol. 6, No. 1, pp. 3–10.

HALMOS, P. R. 1975. The Problem of Teaching to Teach. *American Mathematical Monthly* (Washington, D.C.), pp. 466–76.

The Journal of Children's Mathematical Behavior. R. B. Davis et H. Ginsburg (dirs. pub.) Champaign, Ill., Study Group for Mathematical Behavior (P.O. Box 2095 – Station A).

KILPATRICK, J. 1981. The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* (Montréal), Vol. 2, No. 2, pp. 22–9.

KRULIK, S. ; REYS, E. 1980. Problem Solving in School Mathematics. *NCTM Yearbook.* (Contient une bibliographie annotée de la littérature relative à la solution de problèmes).

LAKATOS, I. 1978. *Mathematics, Science and Epistomology : Philosophical Papers,* Vol. 2. New York, Cambridge University Press.

MCINTOSH, A. ; QUADLING, D. 1975. Arithmogons. *Mathematics Teaching,* No. 70, mars, pp. 18–23.

OTTE, M. 1979. Formation et vie professionnelle du maître de mathématiques. *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques,* Vol. IV, pp. 115–142, Paris, Unesco.

POLLAK, H. O. 1970. How Can We Teach Applications of Mathematics ? *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 2, pp. 261–72.

POLYA, G. 1963. On Learning, Teaching, and Learning Teaching, *American Mathematical Monthly* (Washington, D.C.), pp. 605–19.

. 1966. *Mathematical Discovery : On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* Vols. 1 et 2. New York, Wiley.

SEMADENI, Z. 1981. *The Concept of Prematematics as a Background for Primary Mathematics Teaching.* Varsovie, Académie polonaise des sciences.

SKEMP, R. 1979. *Intelligence, Learning and Action : Foundation for Theory and Practice in Education.* New York, Wiley.

TAMBURRINI, J. 1975. Implications of Piaget's Theory for In-Service Education. *Mathematics Teaching,* No. 72, septembre, pp. 4–9.

TAMMADGE, A. 1971. How Much Does it Cost to Keep a Dog ? *Mathematics Teaching,* No. 57, Hiver, pp. 9–11.

WAIN, G. T. ; WOODROW, D. 1980. *Mathematics Teacher Education Product.* Glasgow, Blackie.

WALTHER, G. 1979. *Representative Examples; An Aspect of Simplification in Mathematics Teaching.* Université de Dortmund. (Leçon inaugurale non publiée).

WINTER, H. 1975. Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht ? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* pp. 106–16.

WITTMAN, E. 1971. Complementary Attitudes in Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 4, pp. 243–51.

. 1981*a*. The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 3, pp. 389–97.

. 1981*b*. *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* 6ème éd. rév. Brunswick, Vieweg.

David C. Johnson

L'informatique : les incidences de l'emploi des calculatrices et des ordinateurs sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

La technologie, de plus en plus présente à l'école et dans la vie courante, exerce sur les enseignants et les programmes scolaires une pression considérable. Du fait de la technologie actuelle de la micro-électronique, ce sont les mathématiques qui sont sans doute les plus directement concernées. Cela ne veut pas dire que des nouveautés comme les machines de traitement de texte "d'emploi facile" et "peu coûteuses" ou les systèmes informatisés de recherche documentaire en bibliothèque ne sont pas appelées à avoir un retentissement encore plus grand sur l'enseignement d'autres matières. Mais les calculatrices et les micro-ordinateurs sont d'ores et déjà en usage dans beaucoup d'écoles des Etats-Unis d'Amérique, du Royaume-Uni et d'autres pays développés, où l'une de leurs fonctions principales est d'apporter un complément et(ou) un soutien à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques. L'emploi de cette technologie soulève de nombreuses questions relatives au programme scolaire telles que :

Quelles sont les techniques et les notions mathématiques qu'il est "fondamental" d'acquérir pour pouvoir fonctionner dans une société technologique ?

Y-a-t-il en mathématiques des domaines ou des sujets qui revêtent désormais une importance nouvelle ?

On est aussi amené à se poser des questions très importantes au sujet du rôle de ces machines dans le processus d'enseignement ; en particulier la question suivante :

Sur quoi faut-il mettre l'accent : sur leur rôle d'outils ou sur leur rôle d'instructeurs ?

Bien que cette dernière question concerne sans doute davantage l'ordinateur, elle se pose aussi parfois à propos de la fonction des calculatrices.

Calculatrices et ordinateurs : des outils ou des instructeurs ?

Il convient ici de préciser les intentions générales du présent chapitre et l'optique dans laquelle il est rédigé. On pourrait y recenser, avec le minimum de commentaires, toutes les utilisations possibles des calculatrices et des ordinateurs dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. La liste comprendrait leur fonction d'instructeur ou la possibilité de s'en servir pour s'entraîner à des exercices pratiques, leur emploi pour la simulation et les jeux ainsi que pour la production de données destinées à démontrer et (ou) à renforcer des concepts, et enfin leur utilité aux fins de la "conception d'algorithmes", c'est-à-dire de l'élaboration par les enfants de leurs propres procédures ou programmes informatiques qui seront traités par la machine. Cet ensemble d'activités illustre l'éventail continu de fonctions allant de celle d'"instructeur" à celle d'"outil". Il faudrait un livre entier pour étudier convenablement toutes ces utilisations. On considérera donc, aux fins du présent chapitre, que c'est en tant qu'outil permettant d'explorer les notions mathématiques et d'élargir la gamme des activités et des sujets d'étude abordés que la technologie des calculatrices et des ordinateurs offre le plus de virtualités. Selon cette optique, c'est l'utilisateur, c'est-à-dire l'enfant, qui commande la technologie, et non la technologie qui commande ou dirige l'utilisateur.

Avant de poursuivre, on doit souligner qu'il est paradoxal que les calculatrices et les ordinateurs soient si souvent utilisés pour vérifier les résultats de longs calculs effectués à la main, ou que les ordinateurs servent à présenter, par exemple, des exercices de multiplication à deux chiffres et à renvoyer ensuite à l'utilisateur, quand il a donné sa réponse, les messages "exact" ou "inexact, essayez encore une fois". En pareil cas, le maître ou l'école pensent manifestement qu'il est indispensable de posséder une grande maître des algorithmes de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division et que l'ordinateur, employé de cette façon, peut améliorer ou faciliter l'acquisition de ces techniques.

D'une manière générale, les conclusions de la recherche militent en faveur de l'emploi de la technologie pour l'acquisition des techniques mathématiques (Burns et Bozeman, 1981). Mais c'est là éluder la vraie question, qui est de savoir s'il est justifié d'utiliser la machine pour apprendre aux enfants à exécuter des tâches que la machine peut de toute façon exécuter mieux qu'eux. Pourquoi les algorithmes ou techniques de calcul ont-ils en effet vu le jour ? Sans doute parce qu'à un certain moment il est devenu trop pénible ou trop difficile de se remémorer toutes les "données de base". Un de mes amis mathématiciens

me fit remarquer un jour que toutes les sommes et tous les produits sont en réalité des "données de base". Nous n'avons inventé les algorithmes de traitement des problèmes à plusieurs chiffres que pour ne pas avoir à mémoriser les résultats dont nous pourrions avoir besoin. Par exemple, le produit 45 x 27 est en réalité une donnée de base. On peut l'écrire " 45 x 27" ou, de façon plus significative, "1215" (encore que dans certains contextes la première forme – le produit – puisse constituer, pour un problème donné, une réponse plus significative et plus appropriée). Evidemment, même aux temps anciens, le nombre de ces données éventuellement nécessaires était imprévisible. Il était donc logique d'inventer des méthodes pour les déterminer avec une rapidité et une précision raisonnables (le système de numération décimale et les algorithmes de calcul correspondants constituent une réalisation vraiment remarquable). On estime traditionnellement que la maîtrise de ces algorithmes de calcul est très importante à la fois pour l'emploi des mathématiques dans la vie courante et comme prélude à l'étude d'autres branches des mathématiques. Mais est-ce toujours aussi important aujourd'hui ?

La plupart des maîtres seraient prêts à convenir qu'il importe de donner aux enfants l'occasion d'explorer les notions mathématiques et de "jouer" avec les mathématiques (philosophie qui est à la base d'un grand nombre des tentatives faites au Royaume-Uni au cours des années 60 et 70 pour développer les mathématiques à l'école primaire). Pour George Polya, mathématicien et spécialiste de la pédagogie mathématique de réputation mondiale, professeur honoraire à l'Université Stanford, la pensée mathématique n'est pas purement formelle. Elle n'est pas faite seulement d'axiomes, de définitions et de démonstrations rigoureuses, mais de bien d'autres choses encore, dont la généralisation à partir de cas observés, le raisonnement inductif, le raisonnement par analogie, et l'identification ou l'extraction de concepts mathématiques à partir de situations concrètes. Polya (1965) nous demande aussi d'apprendre aux élèves à conjecturer. Ses écrits sur le processus de la résolution de problèmes manifestent tous l'importance qu'il attache aux mathématiques *actives*. Cependant, il arrive souvent que le jeu mathématique disparaisse sous une arithmétique fastidieuse et que les enfants maîtrisent mal le calcul. Une façon d'essayer de surmonter cette difficulté consiste à passer un temps considérable à la pratique répétitive des algorithmes de l'arithmétique. Pour revenir à la question précédente, est-ce réellement nécessaire ? Il est sans doute utile de comprendre comment fonctionne un système de numération à base 10, ou à base différente. Si l'on habitue de bonne heure les enfants à manier des représentations concrètes des nombres (les blocs multibases, par exemple), ils comprendront très probablement cette notion, ainsi que la signification de la position des chiffres. Mais l'apprentissage mécanique, par la pratique répétitive, des algorithmes de calcul à plusieurs chiffres mérite-t-il tout le temps qu'on

y consacre actuellement ? Je réponds non. La calculatrice peut être utilisée pour retrouver avec rapidité et précision l'information nécessaire. Face à un problème, l'enfant doit aussi prendre des décisions sur l'information ou les données à utiliser et à traiter. Et pour résoudre le problème, il doit en outre interpréter les données de sortie. Ce sont ces décisions qui sont cruciales dans le traitement de l'information. Ceux qui considèrent ces idées comme une "hérésie" diront alors : mais que faire si la calculatrice tombe en panne ? ou si l'on ne dispose pas d'une calculatrice ? Ma réponse est la suivante : on va en chercher une autre, ou bien on attend de pouvoir disposer d'une machine, si l'on est vraiment soucieux d'exactitude. Et si l'on n'a pas besoin d'un résultat exact, on appplique alors certaines techniques d'estimation.

Il faut souligner ici que je ne m'attends pas à ce que tous les lecteurs approuvent ce point de vue ; je ne pense d'ailleurs pas qu'un accord sur ce point soit souhaitable. Mon but est d'inciter les enseignants et autres personnes concernées à réfléchir à ce qu'il faut entendre par "arithmétique élémentaire" à l'ère technologique. Je dirai plus loin ce que j'en pense. Mais avant d'aborder les questions spécifiquement scolaires, je commencerai par retracer brièvement l'histoire des calculatrices et des ordinateurs. On verra que, au fur et à mesure que le calcul a pris de l'importance dans les activités commerciales, l'homme a cherché à mécaniser ce travail.

Bref historique des calculatrices et des ordinateurs[1]

Le British Science Museum contient une vaste salle d'exposition absolument passionnante où l'on peut suivre, d'un côté de la salle, l'évolution des mathématiques, et de l'autre celle des machines à calculer et des ordinateurs. Parmi les matériels exposés, plusieurs illustrent l'accélération continuelle du rythme auquel se succèdent les innovations importantes.

Dans l'étude des instruments de calcul, on commence en général par le boulier compteur, ou abaque, utilisé pour faciliter les calculs fastidieux. Un panneau mural, au Science Museum, indique que le plus ancien exemple connu d'utilisation de cet instrument remonte à l'antiquité grecque, et date de quelques siècles avant notre ère. D'autres informations nous apprennent qu'une forme particulière de boulier était

1. Cet historique est extrait, avec quelques modifications, de la leçon inaugurale de Professeur Johnson, "Figures and Chips" [Chiffres et puces], qu.il a donnée au Chelsea College de l'Universite de Londres, le 20 janvier 1979.

couramment utilisée en Chine comme instrument de calcul jusqu'au 13ème siècle, et qu'une variante du modèle chinois s'implanta au Japon vers l'an 1600. Cet instrument, connu sous le nom de "boulier japonais", reste encore très employé jusqu'à ce jour. Ainsi, l'on voit qu'il y a plus de 2000 ans que les hommes se sont employés à mettre au point un instrument qui puisse effectuer les calculs longs et souvent ennuyeux. L'enseignement actuel, qui attache une telle importance à l'aptitude à calculer avec rapidité et exactitude à l'aide de crayon et de papier, se caractérise donc par une orientation inverse.

La règle à calcul constitua une autre invention intéressante dans ce domaine. La règle à calculer, ainsi que le cercle à calculer, furent inventés par un pasteur de campagne anglais, William Oughtred, vers 1621. Cependant, la règle à calcul reposait sur deux notions mathématiques découvertes antérieurement : en premier lieu, les logarithmes (représentation de tout nombre par un exposant en base 10 ou en base *e*), dont l'invention est attribuée au célèbre mathématicien John Napier, baron de Merchisten, près d'Edimbourg en Ecosse. Napier publia son livre sur les logarithmes en 1614. En second lieu, il fallait créer la graduation logarithmique de la droite avant de pouvoir appliquer l'invention de Napier à la règle à calcul. Cette graduation est due à Edmund Gunter, professeur à Gresham College, et fut publieé en 1623. La règle à calcul allait jouer un rôle important dans le développement des sciences pendant plus de 200 ans. Mais elle est désormais définitivement supplantée par la calculatrice scientifique et est entrée dans l'histoire.

Quand et comment les machines à calculer sont-elles apparues ? En fait, leur histoire remonte au début du 17ème siècle, comme pour la règle à calcul. Certains mathématiciens comme Leibniz et Pascal figurent parmi les premiers inventeurs. Cependant, aucune des nombreuses tentatives ingénieuses de cette époque n'a donné le jour à une machine vraiment fiable. La première machine à calculer raisonnablement fiable n'apparaît au Royaume-Uni qu'au 19ème siècle : c'est l'arithmomètre de Thomas. A partir de ce moment, les progrès sont rapides. En 1872 on invente la machine à barillet, qui deviendra la calculatrice universelle la plus répandue de 1890 environ aux années 30. En 1922, on dispose de la première machine entièrement automatique, mais encore mécanique, pour la multiplication et la division : la machine à calculer tout automatique de Monroe. Les calculatrices imprimantes virent le jour vers 1900, mais on ne les utilisa véritablement que vers les années 1930–1940. La première calculatrice électronique, l'Anita, ne fut mise au point et fabriquée au Royaume-Uni qu'en 1961 et devait céder la place, au début des années 70, à un clavier de dix chiffres, avec des touches de mémoire. Vers 1974, la technologie de la "puce électronique" eut une influence déterminante sur les calculatrices, avec l'avènement du HP65, la première calculatrice de poche programmable au monde.

Cette technologie des circuits intégrés miniaturisés a eu pour autre effet majeur de faire baisser le prix des calculatrices au point qu'on peut désormais acheter une machine simple effectuant les quatre opérations pour moins de 10 dollars US.

L'évolution des ordinateurs suit étroitement l'histoire récente des calculatrices. Les machines mécaniques à cartes perforées, ou à commande automatique, furent utilisées dès la fin du 19ème siècle. Considérées comme les premiers "ordinateurs" ayant fonctionné, on en attribue habituellement la paternité au mathématicien anglais Charles Babbage (1791–1871). A cause des nombreuses erreurs qu'il découvrait dans les tables mathématiques, Babbage décida de construire une machine qui calculerait et imprimerait les tables automatiquement. Avec le soutien du gouvernement britannique, il commença à travailler à sa première "machine à différences" en 1823. Il en arrêta la construction en 1833 pour s'attacher à la mise au point d'une nouvelle machine à calculer universelle (le nom de "machine analytique" lui fut donné pour la première fois en 1841). Malheureusement pour Babbage, son projet dépassait les possibilités pratiques des procédés de fabrication de l'époque et aucune machine analytique capable de fonctionner ne fut jamais construite. Cependant, ses premières machines sont exposées au Science Museum et elles sont très impressionnantes.

Les ordinateurs ont véritablement commencé leur percée pendant les années 1930–1940, longtemps après Babbage, avec la première machine électromécanique, la Mark I de Harvard, qui fut mise au point et employée aux Etats-Unis d'Amérique de 1937 à 1944. Le premier calculateur électronique universel, l'ENIAC, mis au point par Echert et Manchly à l'University of Pennsylvania, fonctionnait en réalité dès 1942, bien que la période de fonctionnement généralement indiquée soit 1946–1955. L'ENIAC était 1500 fois plus rapide que son prédécesseur le Mark I de Harvard. A partir de là, les progrès sont très rapides et il est difficile d'établir une chronologie précise, ou de déterminer exactement la contribution de chacun. Parmi les innovations qui ont permis les perfectionnements de la technologie actuelle, citons :

Le programme enregistré : le premier prototype à en faire usage qui ait réellement fonctionné fut mis au point à Manchester (Royaume-Uni) en 1948 ;

Le transistor, mis au point par les Bell Telephone Laboratories en 1948 pour remplacer les lampes, ou tubes à vide (cependant, ce n'est qu'à la fin des années 50 qu'on construisit des machines tirant pleinement parti de cette technologie) ;

Les circuits intégrés, au début des années 60 ;

La "puce" électronique, pouvant contenir des milliers de composants.

Dès 1971, l'unité centrale tout entière tenait sur une puce. C'est cette innovation qui est la base de la technologie des années 80. Nous disposons à présent de petits ordinateurs de bureau, qui sont plus rapides, plus

fiables et beaucoup moins chers que ceux des années 40 et 50. Il est impressionnant de penser que l'ENIAC occupait 85 m^3 et pesait près de 30 tonnes, et que, alors que les premières machines coûtaient des centaines de milliers de dollars, on peut avoir maintenant un matériel meilleur pour moins de 500 dollars US.

Que faut-il en conclure ? Cette évolution a-t-elle atteint un palier ? La réponse est, semble-t-il, négative. Il se pourrait bien cependant que le prochain progrès réel consiste à produire des ordinateurs domestiques ayant la puissance des machines actuelles "plus grosses" en introduisant de nouveaux raffinements dans les applications et les utilisations de ce matériel. Cette tendance se dessine dans l'apparition de petits micro-ordinateurs domestiques ou scolaires peu coûteux avec des sorties graphiques en couleur de haut résolution, une mémoire importante, etc.

Nous disposons aussi maintenant de "langages de programmation" faciles à apprendre et à employer, et bientôt n'importe qui sera capable de faire fonctionner son ordinateur personnel. Les progrès des langages de programmation sont aussi impressionnants que ceux du matériel. Du codage-machine en "binaire" ou en "octal", on est passé à ce qu'on appelle le langage d'assemblage (codage alphanumérique), plus à des langages plus universels et plus "naturels", comme le "Fortran", "l'Algol", le "PL-1", le "Cobol", etc. qu'on désigne souvent sous le nom de langages "évolués". Cependant, on a encore raffiné ces langages évolués et mis au point de nouveaux langages qui permettent quasiment à n'importe qui, même à de jeunes enfants, de programmer la machine et d'explorer des idées et des relations. Le langage le plus répandu, utilisé sur la plupart des micro-ordinateurs actuels, est le "Basic" (un langage conçu pour les non-spécialistes). Il existe cependant un certain nombre d'autres langages du même type, dont deux, à l'heure actuelle, méritent une attention particulière. Le premier de ces langages nouveaux est le "Logo", et les travaux réalisés aux Etats-Unis d'Amérique par Seymour Papert – il emploie la tortue Logo pour faire découvrir à de jeunes enfants les relations mathématiques, à l'aide de puissantes représentations graphiques – sont particulièrement intéressantes. L'autre est le "Comal", un langage qui présente certains rapports avec le Basic. Certaines caractéristiques de la structure du Comal en font un langage particulièrement adapté à une utilisation universelle. Beaucoup des langages récents ont d'ailleurs pour caractéristique essentielle de ne pas être difficiles à utiliser.

Où cela nous mène-t-il ? Les raisons qui ont motivé ces innovations dans le domaine des calculatrices et des ordinateurs sont nombreuses et souvent contradictoires. Il est cependant évident que cette technologie vise principalement à accroître et étendre les capacités mentales de l'individu. L'homme a maintenant la possibilité de se livrer à des études et des investigations qu'il lui aurait été auparavant impossible de mener à bien, même en toute une vie de travail.

Il existe aussi un autre aspect important : l'ampleur et la fréquence de plus en plus grandes des progrès technologiques. Dans cette optique, considérons l'écolier âgé aujourd'hui de 7 à 10 ans. De quelles techniques et connaissances cet enfant aura-t-il besoin pour pouvoir poursuivre ses études et, ce qui est encore plus important, pour pouvoir entrer dans le monde du travail et des loisirs ? La vie dans une société technologique évolue si vite qu'"apprendre à apprendre" constitue la forme d'éducation essentielle. Les mathématiques scolaires offrent de nombreuses occasions d'explorer et d'étudier des structures tirées de l'environnement de l'enfant. On tentera dans le paragraphe suivant de traduire cette idée sous une forme concrète et utile au niveau de l'école primaire.

Les réalités de la pratique scolaire

Que signifie "apprendre à apprendre" ? Sans doute quelque chose qui se rapproche de la faculté à résoudre des problèmes. D'après George Polya, c'est par la pratique qu'on apprend. Mais cela suppose que l'on fournisse à l'enfant les occasions nécessaires dans un contexte stimulant. Je me plais à considérer les mathématiques comme une matière qui offre en abondance de telles occasions et qui, par nature, favorise l'investigation et incite à se poser des questions. "Que vois-je dans ce graphique ?", "Quelles relations fait apparaître cet ensemble de nombres ?" ou, plus généralement, "Que se passe-t-il si ?" sont des questions qui viennent naturellement à l'esprit dans le cadre du programme de mathématiques, à tous les niveaux.

Par quoi le maître doit-il commencer ? Je répondrai : "par essayer quelque chose". Avant de citer des exemples de ce qu'on peut essayer, revenons à la question de l'arithmétique élémentaire. Celle-ci comprend à mon sens les composantes suivantes (mais d'autres seront, là-dessus, d'un avis différent) : l'aptitude à faire avec aisance des calculs portant sur des nombres à un seul chiffre ; l'aptitude à manier les puissances de 10 ; la compréhension de la valeur de la position des chiffres ; et le sens des nombres permettant, en particulier, de savoir quoi faire et à quel moment.

Les arguments justifiant à mes yeux la liste ci-dessus sont simples. D'abord, pour pouvoir apprécier si le résultat donné par une calculatrice est mathématiquement vraisemblable, il faut être en mesure de procéder à une *estimation*. Une méthode d'estimation rapide consiste à travailler mentalement sur des nombres "faciles". J'ai publié à ce sujet un article (Johnson, 1979) qui offre au maître des suggestions. La technique consiste essentiellement à substituer aux nombres donnés d'autres

nombres dont la forme est celle d'un nombre à un seul chiffre multiplié par une puissance de 10. Par exemple, "620 x 46" devient "600 x 40", soit "6 x 100 x 4 x 10". Il faut remarquer qu'au début les enfants peuvent se contenter d'utiliser le premier chiffre : ainsi, "46 devient 40". Pour les besoins de l'estimation, le calcul ne fait donc plus intervenir que des nombres à un chiffre et des puissances de 10. Bien sûr, même pour être capable d'effectuer ce calcul simple, l'enfant doit avoir saisi les propriétés de commutativité et d'associativité des nombres. Il faut aussi qu'il connaisse la signification de la position des chiffres, surtout quand interviennent des nombres décimaux ou quand le calcul comporte, par exemple, l'addition de nombres qui diffèrent entre eux d'un facteur 10 ou plus.

Or, personne n'a jamais dit quelle était la meilleure façon d'enseigner ces quatre composantes et je ne suis pas sûr que nous puissions apporter une réponse satisfaisante à cette question. On ne saurait dire, en tout cas, que les écoliers actuels maîtrisent ne serait-ce que les trois premières notions de cette courte liste. Il est admis, toutefois, que ces notions figurent parmi les plus difficiles à enseigner.

Le quatrième élément de ma liste, le sens des nombres, recouvre en réalité plusieurs notions. D'abord, l'enfant doit être capable de déterminer *quand* il faut utiliser une, ou plusieurs, des quatre opérations élémentaires et comment aborder un problème donné.

Deuxièmement, je pense que les enfants devraient savoir manipuler facilement les nombres et être capables de discerner les relations mathématiques et d'en tirer parti, aspect qui est souvent négligé à l'heure actuelle dans l'enseignement des mathématiques. Pourtant, parmi les livres de problèmes numériques à résoudre à l'aide d'une calculatrice que l'on trouve actuellement sur le marché, beaucoup contiennent, à mon avis, des exercices d'un grand intérêt pour l'acquisition du "sens des nombres" tel que je le conçois. J'en donnerai ci-après quelques exemples qui se caractérisent par un énoncé dans lequel on a laissé en blanc certains chiffres ou certaines opérations qu'il s'agit de retrouver. Il est possible, bien sûr, d'effectuer ces exercices sans calculatrice, mais on verra que cet instrument facilite le travail et le rend plus intéressant ou plus amusant.

Trouver les chiffres manquants (à chaque carré correspond un chiffre compris entre 0 et 9)

93 x 8 □ = 7 □ □ 8

□ □ 6 x 84 □ = 232668

3 □ □ 4 ÷ 8 □ = 48

Trouver les opérations manquantes	(37 ○ 21) ○ 223 = 1000
(à chaque cercle correspond l'une des quatre opérations : +, −, x, ou ÷)	27 ○ (36 ○ 11) = 675
	619 ○ 316 ○ 425 ○ 196 = 924

On voit que ces problèmes se prêtent à la recherche ou à l'observation de certaines relations. Il y a un réel avantage à employer une calculatrice car on peut aborder ce type de problème de plusieurs façons différentes, y compris par la méthode des essais et des erreurs, qui, pour certains enfants, représente la seule façon de démarrer. Cependant, ce type d'exercice est aussi de nature à faire réfléchir sur les relations mathématiques et à favoriser de ce fait l'apprentissage de certaines notions. Nous laisserons au lecteur le soin de découvrir la solution de ces problèmes, mais on remarquera que ceux qui consistent à retrouver les opérations manquantes illustrent bien le nécessité de techniques d'estimation. En effet, si, pour le premier d'entre eux, on procède au hasard, par essais et erreurs, il se peut qu'on ait à essayer jusqu'à 4 x 4 à 16 possibilités avant de trouver la bonne réponse. Nous avons choisi délibérément de grands nombres, pour rendre l'exercice plus stimulant, mais on remarquera que ce type d'exercice peut s'adapter à tous les niveaux. Ainsi, pour les premières années du primaire, il peut ne comporter que des nombres inférieurs ou égaux à 30, par exemple, et ne faire intervenir qu'une ou deux opérations. L'enfant s'appuiera alors sur sa compréhension intuitive de la valeur positionnelle des chiffres ou sur le "comptage", car des exercices de ce type n'exigent pas qu'il connaisse les algorithmes formels des opérations. En voici un exemple :

$$\square\ 8 - \square = 13$$

On trouvera chez Johnson (1981) une discussion plus compète de ce type d'exercices à effectuer à l'aide d'une calculatrice.

Il existe aussi en arithmétique élémentaire un autre aspect essentiel du "sens des nombres" qui est l'aptitude à apprécier la "vraisemblance" d'un résultat (Johnson, 1979). Mais l'enseignement touchant à la "vraisemblance" se heurte à une difficulté majeure du fait que ce terme même n'a pas de définition précise. Que convient-il de faire, dans la pratique, pour évaluer la vraisemblance ? De ce point de vue, nous pouvons identifier deux types différents de "vraisemblance", impliquant que l'on réagisse à un résultat, ou à un nombre, d'une part au regard de la réalité physique (c'est-à-dire en rapportant les nombres à son expérience et à sa connaissance du monde réel), et (ou) d'autre part au regard de certaines relations mathématiques. On illustrera chacun de ces deux aspects par un court exemple.

Pour le premier, supposons qu'on ait à calculer le "nombre de kilomètres par litre d'essence" que parcourt une automobile neuve,

dans l'hypothèse où le conducteur a consommé 31,1 litres d'essence pour 443,3 kilomètres. En faisant abstraction des chiffres, nous savons par expérience que la réponse doit être comprise entre 8 et 16 kilomètres par litre. C'est pourquoi, si le calcul donne comme résultat 1,42 km au litre, par exemple, il faut immédiatement soupçonner une erreur. En ce qui concerne le second type de "vraisemblance", l'enfant doit se montrer capable de faire le lien entre un résultat et ce qu'il sait déjà des nombres et de leurs propriétés. Par exemple, si, dans un problème, il lui faut additionner deux fractions positives, disons 1/2 et 1/3, l'enfant doit se dire que la somme est nécessairement supérieure à la plus grande des deux fractions. Ainsi, un résultat égal à 2/5 (erreur la plus fréquente, donnant une valeur inférieure à 1/2) doit l'amener à refaire le calcul. Il s'agit là d'une notion qui n'est pas difficile à insérer dans le programme normal de mathématiques. Mais la façon dont elle est actuellement enseignée demande à être revue. En effet, il s'agit aujourd'hui le plus souvent d'un enseignement donné *a posteriori,* lors de l'examen des erreurs que l'enfant a pu commettre. Cet enseignement et la pratique correspondante (éventuelle) supposent donc qu'une réponse inexacte ait déjà été donnée. Pareille façon de procéder est pédagogiquement contestable, car elle met l'enfant aux prises simultanément avec deux tâches très différentes : premièrement, corriger la réponse qu'il a faite à une question précise ; deuxièment, assimiler les techniques qui permettent d'évaluer la vraisemblance d'un résultat. En outre, si l'enfant n'a pas commis d'erreur, il risque d'être entièrement privé de cet enseignement relatif à la "vraisemblance des résultats".

Utilisation des calculatrices ou ordinateurs : schéma de classification des activités possibles

Considérons maintenant sous un angle plus pratique les activités que les maîtres peuvent introduire dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. A cet effet, on peut utiliser un schéma, un ensemble de descripteurs, et classer chaque activité du point de vue de sa finalité principale. Il ne s'agit pas de viser à une correspondance absolue entre chaque activité et tel ou tel descripteur. Le descripteur est plutôt destiné à offrir au maître une ligne directrice pour l'organisation des activités. Dans certains groupes d'enfants, la même activité peut très bien être classée de façon différente selon les élèves : le "niveau de préparation" ou les "prérequis" détermineront souvent le descripteur qui convient le mieux. L'important est que le maître réfléchisse à la

fonction que doit remplir l'activité pour chaque élève de la classe pris individuellement. Personnellement, j'emploie les trois catégories suivantes : renforcement de concepts ; démonstration de concepts ; résolution de problèmes (ou conception d'algorithme).

La catégorie du renforcement de concepts se caractérise par le fait que l'activité fait intervenir ou recèle un concept ou une notion qui a déjà été présenté ou enseigné : cette utilisation et les données qu'elle génère (le résultat de sortie) renforcent ce que l'enfant a appris. Dans la démonstration de concept, l'enfant est censé connaître les procédures d'entrée et de traitement qui peuvent donc comporter également un aspect de renforcement. C'est le résultat de sortie qui démontre une relation mathématique importante : en étudiant les données "générées", l'enfant découvre, ou observe, une relation ou un concept mathématique important.

Quant à la résolution de problèmes (ou conception d'algorithmes), l'expression dit bien ce qu'elle veut dire : la calculatrice ou l'ordinateur constitue pour l'enfant un instrument lui permettant d'explorer, de tester et, en fin de compte, de formuler la solution d'un problème. En l'occurence, il faut entendre par "problème" une situation nouvelle, ou une situation pour laquelle l'enfant ne dispose pas de méthode de résolution prédéterminée. Après délibération, l'enfant qui traite le problème peut essayer un certain nombre d'approches ou "heuristiques" différentes pour trouver la solution. On peut subdiviser les problèmes en problèmes de nature purement mathématique et problèmes faisant intervenir des applications des mathématiques. A l'heure actuelle, on peut certainement inclure sans difficulté ces deux types de problèmes dans les mathématiques enseignées à l'école primaire. Les moyens auxiliaires de calcul, calculatrices et ordinateurs, déchargent l'enfant de l'obligation d'effecteur des calculs compliqués. Il a ainsi le temps de réfléchir à la démarche suivante et d'examiner la signification du résultat de sortie. L'ouvrage de Burkhardt (1981) contient une étude passionnante sur la "résolution de problèmes réels" dans les mathématiques scolaires à tous les niveaux. Il constitue une excellente source de problèmes et il présente les idées de George Polya selon une approche plus diversifiée.

Mais j'en ai assez dit sur les idées et le contexte général, et il est temps de passer aux exemples. On ne pourra citer ici que quelques exemples représentatifs. Pour d'autres idées d'activités scolaires, le lecteur peut s'adresser à l'ERIC Calculator Information Center[1], aux Etats-Unis d'Amérique. C'est une excellente source, aussi bien pour la bibliographie que pour les compte rendus de livres et d'articles. On peut aussi consulter; au Royaume-Uni, la Schools Calculator Working Party (SCWP)[2].

Exemples d'utilisation des calculatrices ou ordinateurs dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire

Renforcement de concepts

Considérons le cas où l'enfant a déjà appris la multiplication et est prêt à aborder les ensembles de multiples. Il est évident qu'on peut utiliser la calculatrice ou l'ordinateur pour générer rapidement ces ensembles soit par multiplication soit par addition répétée (pour les multiples de 7, par exemple, partir de zéro et ajouter 7 une vingtaine de "fois" à la valeur précédente). Un coup d'oeil au résultat permettra de vérifier qu'il est conforme aux prévisions. L'enfant peut aussi étudier les données et rechercher des configurations. Par exemple, tous les multiples de 5 se terminent par 0 ou 5 ; pourquoi ? Un autre exercice important consiste à comparer entre elles les deux méthodes d'obtention des multiples. L'une des deux est-elle plus élégante ou plus efficace que l'autre ? Si vous avez une calculatrice, quelle technique – multiplication ou addition – utiliseriez-vous pour obtenir : (a) les 15 premiers multiples de 9 ? (b) le 17ème multiple de 9 ? Le choix de la technique ou algorithme (procédure) – la meilleure ou la plus efficace pour accomplir une tâche donnée, constitue une partie importante du traitement de l'information, ou "informatique". L'idée n'est pas nouvelle. Engel (1979) donne à ce sujet de nombreux exemples et analyses convaincants.

Si l'enfant utilise l'ordinateur pour générer le résultat, il devra formuler avec précision la séquence des opérations. Que recouvre l'expression "générer les multiples" ? Voici deux programmes différents en Basic pour les multiples de 9 :

1. The Ohio State University, 1200 Chambers Road, Columbus, Ohio 43212, (Etats-Unis d'Amérique).
2. c/o The Shell Center for Mathematics Education, The University of Nottingham, University Park, Nottingham NG7 2RD (Royaume-Uni).

Multiplication	Addition
10 FOR N=1 TO 20	10 LET N=0
20 LET A=N*9	15 LET A=0
30 PRINT N,A	20 LET N=N+1
40 NEXT N	25 LET A=A+9
	30 PRINT N,A
(* signifie	35 IF N=20 THEN STOP
"multiplié par")	40 GO TO 20

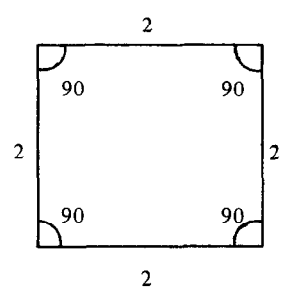
Nous n'attendons pas du lecteur qu'il sache "lire" ces programmes en

Basic, mais il remarquera à quel point la précision est importante. Il est à noter aussi que, lorsqu'on utilise des calculatrices ou des ordinateurs, les mathématiques deviennent une discipline plus dynamique et plus axée sur les processus.

Démonstration de concepts

Considérons le cas où un langage informatique possède quelques instructions très "transparentes" comme FORWARD (avancez), BACKWARD (reculez), RIGHT (à droite), LEFT (à gauche), PEN UP (ne dessinez pas), PEN DOWN (dessinez), les quatre premières instructions étant suivies par des nombres. Pour FORWARD et BACKWARD, les nombres indiquent la distance de déplacement dans le sens indiqué ; RIGHT et LEFT sont des instructions qui déterminent des rotations, les nombres représentant habituellement l'angle (en degrés) du changement de direction. Ces instructions commandent le déplacement d'un objet, soit sur le sol, soit sur l'écran du terminal. On considère ces termes comme "transparents" à cause de la relation naturelle qu'ils présentent avec le monde de l'enfant et le langage qu'il connaît. L'enfant peut alors essayer de résoudre le problème qui consiste à trouver la procédure à suivre pour déplacer un objet de telle sorte qu'avec quatre déplacements vers l'avant (tous de même distance) et trois rotations, l'objet revienne à sa position de départ. Après plusieurs essais, l'enfant pourra aboutir à quelque chose comme ceci :

```
PEN-DOWN
FORWARD 2
RIGHT 90      (degrés)
FORWARD 2
RIGHT 90
FORWARD 2
RIGHT 90
FORWARD 2
PEN-UP
```



Il est évident que ce problème admet de nombreuses solutions. En voici une autre : deux déplacements consécutifs vers l'avant (FORWARD), puis une rotation de 180 degrés, puis deux autres déplacements FORWARD. Mais, dans la procédure précédente, l'enfant a créé ou découvert un carré. C'est là une création dynamique, et non une définition. Si l'enfant est déjà familiarisé avec la notion de carré, on peut utiliser ce type d'activité à des fins de renforcement.

Dans le langage informatique Logo, ce type d'activité est un prolongement naturel du monde de l'enfant. Les termes utilisés dans l'exemple précédent sont d'ailleurs tirés de la "géométrie de la tortue" Logo. Ce langage présente beaucoup d'autres caractéristiques importantes. L'une

d'elles est la possibilité de répéter (instruction REPEAT) un tracé et, surtout, de nommer (NAME) une procédure pour l'appeler (CALL) (l'utiliser) ensuite dans une autre procédure. Par exemple, "NOMME" cet exemple le CARRE. Maintenant, fais un TRIANGLE. Peux-tu les combiner pour faire une MAISON ?" Ce rôle dynamique et exploratoire de l'informatique offre des perspectives passionnantes. Il apporte une dimension totalement nouvelle à l'étude des mathématiques, en particulier par l'utilisation de représentations graphiques commandées par ordinateur. Pour une étude plus complète (et peut-être discutable) de l'utilisation de la tortue Logo à l'école primaire, le lecteur se reportera à deux excellents livres. Celui de Papert (1980) est un exposé "facile à lire" de la philosophie générale du sujet, avec de nombreux exemples. L'autre, de Abelson et di Sessa (1981) constitue une étude mathématique plus rigoureuse de ce mode d'utilisation de l'informatique.

On peut aussi utiliser une calculatrice pour la démonstration de concepts. L'exemple suivant est tiré de Johnson (1978). Une caractéristique essentielle de la "démonstration de concepts" à l'aide de calculatrices est que l'enfant peut produire rapidement de nombreux exemples. Il peut ainsi concentrer toute son attention sur ce qu'il a à apprendre, au lieu d'examiner divers exemples qui lui paraissent moins directement pertinents, en se demandant où on veut en venir. Considérons par exemple l'enseignement de la multiplication des nombres décimaux. Une méthode traditionnelle consiste à expliquer d'abord la règle (de placement de la virgule) à l'aide de fractions, sujet que les enfants trouvent déjà difficile, puis à donner des exercices d'application pratique (la plus grande partie du temps se passant à effectuer des additions arithmétiques courantes). Supposons maintenant, comme autre possibilité, que l'enfant ait déjà été initié aux nombres décimaux par l'intermédiaire de fractions aux dénominateurs 10, 100, etc. Supposons aussi que l'enfant ait un peu de pratique de l'addition et de la soustraction. Il est alors prêt à aborder la multiplication. Pour cette initiation, la calculatrice peut être employée de la manière suivante :

Effectuer, avec votre calculatrice, les multiplications suivantes :

62 x 0,2	0,02 x 0,34
0,8 x 0,6	2,11 x 1,22
3,2 x 0,8	0,72 x 0,6
2,2 x 6,4	0,026 x 0,003

Que remarquez-vous en ce qui concerne la place de la virgule dans les produits obtenus ? Pouvez-vous en tirer une règle ? Pouvez-vous la justifier ?

Les élèves peuvent alors discuter de leurs observations et arriver à certaines conclusions. A ce moment, le maître peut donner son avis, ou laisser les élèves justifier leurs conclusions à l'aide de quelques exemples simples portant sur des fractions ($\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, $\frac{1}{10} \times \frac{1}{100}$, etc.). Il est à noter que, dans la pratique, il faudra généralement faire faire aux enfants une quinzaine ou une vingtaine de calculs. On évitera les calculs qui donneraient un zéro pour le dernier chiffre du produit, comme dans le cas où un facteur se termine par 5 et l'autre par un chiffre pair. Sous cette réserve, ou pourra élargir de façon intéressante l'activité précédente en y ajoutant des exercices comme ceux-ci :

Calculez, avec votre calculatrice, les produits suivants :

2,44 x 0,35
1,26 x 0,45
3,60 x 0,40

Votre règle est-elle toujours valable ? pourquoi ?

Cette activité peut servir à confirmer que la règle reste valable, car la calculatrice supprime le (ou les) zéro(s) final(s) du résultat. Cela renforce (ou démontre) la notion de l'égalité entre un dixième et dix centièmes, etc.

Résolution de problèmes et conception d'algorithmes

C'est là l'objet véritable des mathématiques ! Dans le contexte technologique actuel, il importe de se poser la question : "Qu'est-ce que les mathématiques ?" et de se demander quelle relation il y a entre les mathématiques et l'informatique. La discipline appelée "informatique" est relativement récente. A ses débuts, dans les années 50 et 60, on l'appelait habituellement "analyse numérique". Donald Knuth, un des "géants" de l'informatique, a publié en 1974 un article intitulé "L'informatique et son rapport avec les mathématiques". Dans cet article, il souligne le fait important qu'en "informatique", ou "science de l'ordinateur", les algorithmes constituent la base fondamentale de la discipline (le mot "algorithme" ou "algorisme" provient du nom d'un mathématicien du neuvième siècle, Al Khowârizmî, qui a décrit pas à pas les procédures de résolution de certains types d'équations, en employant la numérotation indo-arabe). Knuth (1974, p. 323) définit l'algorithme comme "une suite de règles définie avec précision, indiquant comment obtenir des informations de sortie déterminées à partir d'informations d'entrée données, en un nombre fini d'opérations". On remarquera qu'un programme informatique est une représentation particulière d'un algorithme. Knuth note également que l'étude des algorithmes constitue

une branche des mathématiques, ou bien que, considérées comme discipline de base, les mathématiques constituent une branche de l'informatique. Dans un cas comme dans l'autre, ce point de vue implique que l'enseignement scolaire (c'est-à-dire en réalité l'enseignement des mathématiques devrait inclure certains aspects des algorithmes et de leur conception.

Le processus de conception d'un algorithme présente une caractéristique importante : bien que le résultat final soit "la description précise d'une procédure", l'activité qui permet d'atteindre ce but ressemble beaucoup au processus de résolution de problèmes tel que Polya le décrit. C'est ainsi qu'on peut essayer une démarche, examiner le résultat, apporter des modifications s'il y a lieu et répéter le processus jusqu'à ce qu'on obtienne une procédure ou un algorithme permettant d'accomplir la tâche fixée.

La résolution d'un problème, ou la conception d'un algorithme ne se limite pas au résultat final. Elle comprend aussi le processus et l'analyse qui permettent d'atteindre ce but. Un algorithme ne correspond pas nécessairement à une procédure entièrement automatisée, mais peut aussi faire intervenir un certain nombre de décisions externes, qui font partie de l'algorithme.

Que peuvent faire les instituteurs pour faire une place plus grande aux processus de la résolution de problèmes et de la conception d'algorithme dans l'enseignement habituel des mathématiques ? Une possibilité consiste à y introduire des activités faisant appel aux démarches de l'investigation et de la généralisation. La généralisation peut être liée à l'analyse des données générées par l'algorithme, ou résider dans l'algorithme lui-même.

On peut placer les enfants dans la situation d'avoir à élaborer et décrire une procédure. Considérons, par exemple, le cas où un élève a appris qu'un nombre premier est un nombre dont les seuls facteurs (diviseurs) sont 1 et ce nombre lui-même. Si l'on travaille avec des calculatrices ou un ordinateur, la démarche logique suivante pourrait consister à demander à l'élève de concevoir une procédure permettant de vérifier si un nombre donné (en entrée) est premier. Après analyse et essais, l'algorithme élaboré par l'enfant, c'est-à-dire, en l'occurence, sa liste d'instructions, ressemblera sans doute à ceci :

Procédure pour déterminer si un nombre est premier
ETAPE 1. Choisir un nombre d'ENTREE (n)
ETAPE 2. Diviser n par le plus petit nombre premier (2)
Diviser n par le nombre impair suivant, jusqu'à ce que ce nombre dépasse x (la valeur de x variera suivant la perspicacité de l'élève ; ce peut être (n-1) ou même n) et, s'il dépasse x, passer à l'ETAPE 4.
ETAPE 3. Examiner le reste de la division (existe-t-il une partie décimale ?) S'il

n'y a pas de reste ECRIRE "le nombre n'est pas premier" et s'ARRETER. AUTREMENT retourner à l'ETAPE 2.

ETAPE 4. ECRIRE "le nombre est premier".

Voici maintenant un autre exemple d'exercice de résolution de problèmes à effectuer à l'aide d'une calculatrice. Cet exercice comportera probablement une recherche par essais et erreurs puis une étude des données (la recherche d'une structure ou d'une relation) et enfin une généralisation.

On vous donne les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. En les employant tous une fois et une seule, composez deux nombres dont le produit soit le plus grand possible. Essayons par exemple : 56 x 1234 = 69104. Pouvez-vous trouver un produit plus grand ? Pouvez-vous décrire une procédure qui permette de trouver le plus grand produit pour les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (sans procéder par "essais et erreurs") ?

Une extension intéressante de cette activité consiste à trouver la plus petite différence positive, en utilisant à nouveau les chiffres de 1 à 6. En outre, pour chacun de ces problèmes, le maître peut stimuler les enfants en écrivant au tableau la "meilleure" réponse donnée "jusqu'à présent". La "meilleure" réponse sera remplacée par d'autres réponses meilleures, au fur et à mesure que les enfants les trouveront. Cet exercice fait intervenir une réflexion sur la signification de la position des chiffres.

La résolution de problèmes trouve des applications dans de nombreux contextes différents. Cependant, pour qu'une activité soit véritablement une résolution de problèmes, elle doit comporter des prises de décisions et une justification des résultats obtenus.

Si l'enfant a quelque expérience de l'ordinateur et du langage de programmation BASIC, les occasions qu'il a d'effectuer des exercices de résolution de problèmes et de conception d'algorithme sont nombreuses. Considérons par exemple le problème suivant : "Que peut-on dire du nombre de nombres premiers que contient chaque centaine (1–100, 101–200, 201–300, etc.) ?" Existe-t-il une centaine ne comprenant pas de nombres premiers ? Si oui, la centaine suivante contient-elle des nombres premiers ? Combien ? La voie est ainsi ouverte à une exploration mathématique illimitée et passionnante. La construction de l'algorithme nécessaire et sa mise en oeuvre sur ordinateur est typiquement une activité de résolution de problèmes.

Discussion

Quelles conclusions tirer de tout cela ? Quelle est la place de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire ? On

peut répondre en considérant l'utilisation des mathématiques à trois niveaux : entrée (intrant), traitement et sortie (extrant). Mais surtout, il s'agit d'une activité qui doit conduire à des décisions fondées sur l'évaluation du résultat de l'extrant et son interprétation. On dispose de machines pour traiter les données, mais ce sont les hommes qui interprètent les résultats. Les algorithmes exécutés par les machines fournissent l'information que les hommes utiliseront.

Une deuxième question tout aussi importante pour les maîtres est la suivante : "Quel doit être le contenu des mathématiques scolaires dans une société technologique ?" Comme la technologie ne cesse d'évoluer, on ne saurait trouver la réponse que dans une boule de cristal. Cependant, on peut affirmer que :

1. Les mathématiques ne consistent pas à apprendre par coeur les techniques du calcul à plusieurs chiffres.
2. Les mathématiques constituent une discipline dynamique axée sur des processus.
3. Les processus de la résolution de problèmes et de la conception d'algorithme sont au coeur de l'activité mathématique.

Selon Knuth (1974, p. 327), "on n'a vraiment compris un sujet que si l'on est capable de l'enseigner à l'ordinateur, c'est-à-dire de l'exprimer sous forme d'algorithme". Cette affirmation confirme ma conception des mathématiques : une discipline dynamique axée sur des processus. Un ensemble de multiples n'est pas une simple entité statique, mais un processus permettant de générer n'importe quel ensemble recherché. La "primarité" ne se limite pas à une définition, c'est plutôt un moyen, un algorithme, pour déterminer si un nombre donné est premier ou non. Un "carré" ou "le fait d'être carré" ne se limite pas à une définition ou à un attribut : il s'agit plutôt d'un processus permettant de construire un carré de taille quelconque. L'estimation ne consiste pas seulement à se livrer à des conjectures pour trouver la "meilleure" approximation. Il s'agit plutôt d'une décision concernant un mode de vérification raisonnable des calculs dans une situation donnée. Les quelques exemples précédents suffisent à mettre en évidence ce qui est essentiel dans l'étude de cette discipline passionnante et très ouverte que nous appelons les mathématiques. Celles-ci constituent donc à la fois une discipline méritant d'être étudiée pour elle-même et un outil permettant d'explorer les structures dans d'autres disciplines. Cependant, et on ne saurait trop le répéter, les mathématiques ne sont pas une collection de techniques. Elles concernent plutôt l'utilisation de démarches et de techniques en vue d'obtenir des données (extrants) qui contribueront à la prise de décision. C'est ce point de vue que nous devons transmettre aux enfants. Enseignées de cette façon, les mathématiques concourront de façon appréciable à l'objectif : "apprendre à apprendre". Je conclurai en citant cet extrait d'un poème du mathématicien danois Piet Hein (1966, p. 34) :

Le chemin de la sagesse

Le chemin de la sagesse, eh bien c'est simple
et facile à expliquer :
C'est l'erreur,
L'erreur ;
Encore l'erreur,
Mais c'est errer
de moins en moins.

Références

ABELSON, H. ; di SESSA, A. 1981. *Turtle Geometry.* Cambridge, Mass. MIT Press.

BURKHARDT, H. 1981. *The Real World and Mathematics.* Glasgow, Blackie.

BURNS, P. K. ; BOZEMAN, W. C. 1981. Computer-Assisted Instruction and Mathematics Achievement : Is there a Relationship ? *Educational Technology,* Vol. 21, No. 10, pp. 32–39.

ENGEL, A. 1979. Algorithmes et calculateurs dans l'enseignement des mathématiques. *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques.* Vol. 4, pp. 263–294, Paris, Unesco.

HEIN, Piet. 1966. *Grooks.* Garden City, N.Y., Doubleday & Co.

JOHNSON, D. C. 1978. Calculators : Abuses and Uses. *Mathematics Teaching,* No. 85, Décembre, pp. 50–56.

. 1979. Teaching Estimation and Reasonableness of Results. *The Arithmetic Teacher,* Vol. 27, No. 1, pp. 34–5.

. 1981. Calculator Exploration for Concept Reinforcement. *Mathematics Teaching,* No. 95, juin, pp. 28–9.

KNUTH, D. E. 1974. Computer Science and its Relation to Mathematics. *The American Mathematical Monthly,* avril, pp. 323–329.

PAPERT, S. 1980. *Mindstorms : Children, Computers and Powerful Ideas.* New York, Basic Books.

POLYA, G. 1965. *Mathematical Discovery.* Vol. II. New York, John Wiley.

M. A. (Ken) Clements

Les causes des difficultés conceptuelles en mathématiques pour les jeunes élèves

Introduction

Les prétendues "difficultés conceptuelles" rencontrées par les jeunes enfants et les élèves du primaire en mathématiques viennent souvent de ce que les parents et l'école veulent leur faire apprendre trop vite trop de mathématiques. Dans le monde entier, on demande aux écoliers d'étudier des notions mathématiques qu'ils ne sont pas encore prêts à maîtriser. Les difficultés posées par les concepts mathématiques ont donc souvent pour origine l'inadaptation des programmes scolaires.

Il arrive cependant parfois que les enfants n'arrivent pas à appréhender des concepts mathématiques pour lesquels ils semblaient pourtant prêts. Cela peut tenir – c'est souvent le cas – au fait que les méthodes d'enseignement ne sont pas satisfaisantes, mais cela peut aussi résulter de tout un ensemble de facteurs personnels propres à l'enfant. Par exemple, un élève peut avoir été absent au moment où le maître introduisait un concept important ou, quoique présent, il était inattentif. On n'essaiera pas de prendre en considération ici ce genre de facteurs personnels, mais on analysera les travaux traitant des difficultés conceptuelles qui sont dues au fait que les situations d'apprentissage offertes par le cours de mathématiques ne parviennent pas à créer chez les élèves les liaisons mentales nécessaires.

Notre but est de rendre compte des travaux qui ont été publiés sur les causes des difficultés conceptuelles que rencontrent les jeunes écoliers dans l'apprentissage des mathématiques. Nous insisterons sur les points importants et nous présenterons quelques aspects mis en évidence par les recherches et l'expérience de nombreux pays. Nous parlerons peu des résultats de recherches très spécialisées portant sur des sujets restreints, et nous n'essaierons pas de faire le point des connaissances actuelles sur chacun des domaines qu'embrasse actuellement l'enseignement des mathématiques à l'école primaire dans les divers pays du monde.

Les difficultés conceptuelles peuvent se répartir en deux grandes catégories : premièrement, celles qui résultent de facteurs extérieurs aux élèves, comme l'inadaptation des programmes scolaires, la langue d'enseignement et l'inadéquation de certaines méthodes pédagogiques ;

deuxièmement, celles qui résultent de facteurs de caractère plus interne, c'est-à-dire de facteurs liés au développement cognitif, affectif et social des élèves considérés individuellement. Nous insisterons surtout sur les facteurs externes, en partant de l'idée qu'ils sont à l'origine des facteurs internes.

Avant d'étudier les causes externes et internes des difficultés conceptuelles, il importe de préciser la notion de "concept mathématique" et d'indiquer comment il faut entendre des phrases telles que : "Jean n'a pas bien saisi le concept de soustraction".

Les concepts mathématiques et leur acquisition par les écoliers

J'ai assisté récemment à un cours sur "le volume des prismes" fait par un instituteur stagiaire à une classe de septième année d'une école australienne. Pendant le cours, j'ai eu l'impression que presque aucun élève ne connaissait le sens du mot "prisme", mais que le maître n'en avait pas conscience. A la fin de la leçon, j'en ai parlé à l'instituteur stagiaire et j'ai obtenu confirmation de mon impression en questionnant deux des élèves qui avaient assisté au cours.

Après quelques observations préliminaires, j'ai montré aux deux enfants un modèle de tétraèdre et leur ai demandé s'ils pensaient que c'était un prisme. "Oui, ont-ils répondu, parce que c'est un solide tridimensionnel". J'ai montré ensuite aux enfants des modèles d'un cube et d'un prisme rectangulaire et je leur ai demandé si c'était des prismes. L'un d'eux a répondu : "oui, parce qu'ils sont tous deux tridimensionnels". Pour l'autre, le prisme rectangulaire était bien un prisme, mais non le cube "parce que c'est un cube", a-t-il dit. J'ai demandé ensuite aux enfants ce qu'était, d'après eux, un prisme. Aucun ne se sentait assez assuré pour donner une réponse précise, bien que tous deux fussent d'accord sur le fait que le prisme devait être un solide tridimensionnel. Quand je leur demandai si tout solide tridimensionnel était un prisme, ils répondirent : "oui", bien qu'un des enfants pensât que le cube pouvait faire exception à cette règle. Une des élèves fit un commentaire particulièrement révélateur : elle dit qu'elle regardait régulièrement une émission de la télévision nationale intitulée *Pick a prism*. Il s'agit d'un jeu dans lequel les gagnants sont invités à "choisir un prisme" parmi un certain nombre de "prismes" identiques (contenant chacun la description d'un prix). Le concept de prisme, chez cette enfant, était lié aux exemples visuels présentés à la télévision. Par une ironie fâcheuse, les prétendus prismes du jeu télévisé, qui étaient des polyèdres complexes, n'étaient même pas, en réalité, des prismes !

Cette discussion avec les deux enfants soulève plusieurs questions

qui intéressent l'acquisition des concepts mathématiques par les enfants. La première concerne le fait qu'un concept est une entité abstraite. Il peut exister différentes représentations concrètes d'un même concept, mais il faut bien comprendre qu'aucune de ces représentations n'est en elle-même le concept. Les deux enfants paraissaient le comprendre puisqu'ils pensaient que tout solide tridimensionnel (sauf peut-être le cube) était un prisme. La compréhension du fait que les concepts sont des entités abstraites et non concrètes a des conséquences importantes pour ceux qui enseignent les mathématiques à l'école primaire. Trop souvent, on invoque les théories de psychologues (comme Jean Piaget) ou de spécialistes de la pédagogie des mathématiques (comme Zoltan Dienes) pour affirmer que, puisque les écoliers du primaire en sont au "stade des opérations concrètes", ils sont incapables d'assimiler des concepts mathématiques sans manipuler un matériel pédagogique concret. Pareille assertion a notamment le défaut de ne fournir aucun critère précis pour le choix de ce matériel pédagogique concret. Ce manque de précision a quelquefois conduit à faire un emploi excessif de certains matériels pédagogiques dans les mathématiques scolaires. Les réglettes de Cuisenaire, par exemple, utilisées dans de nombreux pays au cours de la période 1950–1975 pour l'enseignement des mathématiques aux niveaux pré-élémentaire et primaire, l'étaient parfois à un point tel que les mathématiques elles-mêmes en venaient à être appelées le "Cuisenaire". Les réglettes de Cuisenaire peuvent en soi constituer un excellent matériel d'enseignement et d'apprentissage. Mais si l'on essaie d'enseigner les concepts mathématiques en faisant un usage intensif d'une représentation concrète unique, il en résulte inévitablement que certains enfants se familiarisent très bien avec cette représentation sans saisir pour autant les concepts sous-jacents qu'elle est censée illustrer. A l'inverse, de nombreuses tentatives d'application du principe de représentation multiple de Dienes (1971) dans les classes primaires du monde entier ont mis en évidence la confusion qui peut se produire si on présente aux jeunes enfants un trop trand nombre de représentations concrètes du même concept. Certes, puisque les concepts sont des entités abstraites, il est raisonnable d'essayer de faciliter leur acquisition en en présentant un certain nombre de représentations "riches". Mais le maître doit prendre garde au fait que les jeunes esprits peuvent très bien assimiler tout ce qui caractérise les représentations concrètes des concepts sans appréhender les concepts eux-mêmes.

Il faut aussi souligner le point suivant : étant donné que seule une faible proportion des élèves de l'école primaire sont capables de se faire une idée formelle de la nature abstraite des concepts mathématiques, même les plus élémentaires qu'on leur fait étudier, d'importants concepts mathématiques seront presque inévitablement associés dans l'esprit des jeunes enfants à des représentations concrètes particulières de ces concepts. Il est donc important que les représentations qu'on leur offre

soient riches, c'est-à-dire qu'elles possèdent des caractéristiques faciles à associer aux concepts qu'elles illustrent, mais excluent toute caractéristique étrangère au concept enseigné, qui soit susceptible de retenir à l'excès leur attention. Cela conduit à une deuxième question, évoquée par la discussion sur les "prismes" avec les deux enfants. Il faut que le maître identifie tous les caractères qui définissent un concept, et fournisse des modèles concrets où ces caractères déterminants apparaissent tous clairement. Ainsi, dans le cas du prisme, la condition suivant laquelle celui-ci doit avoir des bases égales dont les points correspondants soient joints par des segments de droite parallèles est aussi essentielle à ce concept géométrique que la condition de tridimensionnalité. Puisque le caractère tridimensionnel d'un solide est immédiatement perceptible, le maître qui désire transmettre le concept de prisme doit plutôt insister sur les autres caractères déterminants.

Une fois qu'ils ont identifié les caractères déterminants d'un concept mathématique, les maîtres de l'école pré-élémentaire et primaire doivent insister auprès de leurs élèves sur le fait que tout objet possédant l'ensemble de ces caractères est un spécimen du concept. Par exemple, un cube n'est pas seulement un cube, c'est aussi un prisme. Il est habituellement de bonne stratégie pédagogique d'attirer aussi l'attention sur les non-exemples du concept étudié. C'est ainsi que ni le tétraèdre ni aucune pyramide ne sont des prismes.

Il serait absurde d'attendre de jeunes enfants qu'ils puissent apprendre les définitions verbales précises de concepts mathématiques. Même à un stade ultérieur, quand on peut raisonnablement demander aux enfants de connaître ces définitions, il faut reconnaître que, dans la plupart des cas, la structure cognitive du concept contiendra chez l'enfant, beaucoup plus que la définition verbale correspondante. En particulier, face à une tâche faisant intervenir un certain concept, le comportement de l'enfant sera probablement guidé par les souvenirs d'épisodes concrets associés dans son esprit au concept par les images du concept qui peuvent ressurgir (Gagné et White, 1978) et par les liens avec la définition verbale que cela évoque en lui. Vinner et Herskowitz (1980) en donnent une bonne illustration à propos du concept de triangle isocèle chez l'enfant. Leurs travaux montrent que beaucoup d'enfants ont du triangle isocèle une image conceptuelle semblable à celle de la figure 1(a) (avec une base horizontale) qui exclut que le

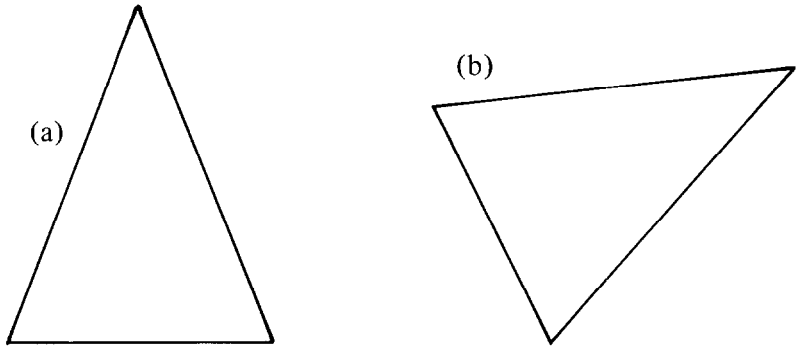


Fig. 1

triangle de la figure 1(b) puisse être isocèle. Ces enfants sont peut-être capables de donner une définition verbale exacte de la notion de triangle isocèle, mais ils ne reconnaîtront pas dans le triangle de la figure 1(b) un triangle isocèle.

A la lumière de la discussion qui précède sur la nature des concepts, il est intéressant de réfléchir au sens d'une phrase courante telle que "Jean ne comprend pas le concept de soustraction". Le concept de soustraction existe-t-il ? En admettant que, pour les élèves de l'école pré-élémentaire et primaire, l'opération arithmétique de soustraction se limite à des paires de nombres naturels ainsi qu'au zéro (et aux cas où le résultat est un nombre positif ou nul), il semble intuitivement évident que les élèves qui ont appris par coeur toutes les données de la table de soustraction (par exemple $7 - 5 = 2$) et qui maîtrisent un algorithme de soustraction convenable (par exemple, pour calculer $752 - 384$) ne possèdent pas toujours pour autant une notion satisfaisante de la soustraction. Le concept de soustraction, dans le cas des nombres naturels, doit comprendre non seulement la notion de différence entre deux nombres mais aussi la capacité de reconnaître que telle situation courante appelle une soustraction. De même que l'on ne saurait prétendre qu'une personne qui n'est pas sûre que le cube soit un prisme a bien saisi le concept de prisme, on ne saurait admettre qu'une personne incapable d'identifier les situations simples où il est utile de faire une soustraction, a compris le concept le soustraction. Une remarque analogue est applicable au concept de nombre rationnel et à beaucoup d'autres concepts mathématiques utilisés couramment dans les mathématiques scolaires.

Si l'on étend ainsi la notion de concept mathématique pour y englober l'aptitude à reconnaître les exemples qui relèvent du concept considéré, il devient urgent d'identifier les difficultés conceptuelles rencontrées et d'aider les maîtres à créer des conditions pédagogiques réduisant le

plus possible ces difficultés. En ce qui concerne les opérations arithmétiques, par exemple, la préoccupation prioritaire ne doit pas être de savoir si les élèves connaissent les données numériques élémentaires ainsi que les algorithmes appropriés ou les touches sur lesquelles il faut appuyer pour effectuer un calcul arithmétique avec une calculatrice électronique. Il est plus important d'assurer qu'ils savent quelle opération particulière ou séquence d'opérations il convient d'effectuer pour résoudre un problème donné. Comme l'a montré une recherche récente d'analyse d'erreurs (Clements, 1980), beaucoup d'enfants qui connaissent parfaitement les données numériques élémentaires et savent effectuer avec exactitude et sûreté les opérations arithmétiques à l'aide des algorithmes classiques ont des difficultés à déterminer l'opération arithmétique qu'il faut utiliser pour résoudre des problèmes arithmétiques apparemment simples, présentés sous forme d'énoncé verbal. Si l'on accepte le sens que nous avons donné dans cet article à l'expression de "concept mathématique", force est bien d'admettre que ces enfants ont des difficultés à appréhender les concepts mathématiques fondamentaux.

Facteurs externes des difficultés conceptuelles que rencontrent les élèves du primaire en mathématiques

Le programme scolaire

Dans une étude récente des facteurs qui influent sur l'apprentissage des mathématiques en Papouasie-Nouvelle-Guinée, Glenn Lean et moi-même arrivions à la conclusion suivante :

> Pour mieux répondre aux besoins de l'enseignement des mathématiques en Papouasie-Nouvelle-Guinée, il serait sans doute bon que les programmes tiennent davantage compte de la situation locale des élèves et des maîtres et correspondent au niveau réel des élèves et non au niveau que, selon les responsables des programmes, ils devraient avoir atteint (Clements et Lean, 1981).

Ces propos, pour sévères qu'ils soient, concordent parfaitement avec les écrits des théoriciens des programmes scolaires comme Skilbeck (1976), qui soulignent la nécessité de fonder les objectifs du programme scolaire de mathématiques sur des analyses de situation. Il n'est pas sérieux que les responsables de l'élaboration des programmes de mathématiques continuent à imposer à tous les écoliers de classes déterminées un travail considérable incluant, par exemple, des opérations sur les fractions, des divisions compliquées, ou des démonstrations axiomatiques dans le cadre de la géométrie euclidienne ou de l'algèbre abstraite, si les recherches faites montrent à l'évidence que la majorité des enfants ne

sont pas prêts à assimiler de telles connaissances. Bien qu'on puisse justifier l'inscription de ces sujets dans le programme scolaire par la nécessité de préparer les enfants à des études mathématiques de niveau plus élevé et le désir de leur révéler la nature axiomatique d'une grande partie de la pensée mathématique, il existe un risque réel qu'un tel enseignement ne convienne qu'aux rares élèves doués et que les autres, ne pouvant comprendre le maître et échouant aux examens, en tirent la conclusion qu'ils ne sont pas capables de faire des mathématiques.

Non seulement les programmes scolaires de mathématiques de nombreux pays (et pas seulement de pays en développement) imposent aux enfants des sujets qui sont souvent trop difficiles pour eux au niveau considéré, mais ils méconnaissent fréquemment les particularités de l'environnement et de la culture dans lesquels vivent les écoliers. Cela soulève la question de savoir dans quelle mesure les programmes de mathématiques peuvent, et doivent, être indépendants de la culture. L'expérience chinoise de la fin des années 60 et de la décennie 70 – période au cours de laquelle les autorités chinoises de l'éducation ont favorisé l'élaboration de programmes scolaires de mathématiques axés sur les besoins locaux et nationaux (Swetz, 1974) – montre que, si l'on essaie de donner un caractère local aux programmes de mathématiques, on s'expose à des difficultés sérieuses et imprévisibles.

La question de savoir si l'enseignement des mathématiques répond aux besoins des élèves et de la société constituait le sujet spécifique du volume 2 des *Etudes sur l'enseignement des mathématiques* (Unesco 1981). On ne l'étudiera donc pas en détail ici. Quelques observations peuvent cependant être utiles.

Premièrement, si, dans les pays en développement, les programmes de mathématiques de l'école primaire continuent à s'inspirer des modèles occidentaux, les enfants finiront sans doute par obtenir des résultats équivalant à ceux des enfants occidentaux lors de tests écrits comparables, mais cela risque de prendre du temps et d'être gravement préjudiciable à la culture traditionnelle de ces pays. Pam Harris, dans son récente étude polémique *Measurement in Tribal Aboriginal Communities* (Australie), formule quelques remarques pertinentes sur les difficultés conceptuelles qu'une telle politique engendre pour les jeunes élèves. Elle affirme, résultats à l'appui, que :

> Tout programme d'arithmétique appliquée conçu pour des enfants australiens blancs anglophones vivant en zone urbaine risque d'être à la fois inadapté et inapproprié pour des enfants aborigènes parlant la langue vernaculaire et vivant dans des communautés tribales isolées. En effet :
>
> Une grande partie des concepts présentés sont étrangers à l'enfant aborigène et en conflit avec sa vision du monde traditionnelle ;
>
> Dans bien des cas, la façon d'exprimer un concept dans la langue maternelle de l'enfant est très différente de celle de l'anglais, ce qui crée des difficultés sur le plan du vocabulaire et de la terminologie ;

Dans certains cas, quand un concept est totalement étranger à la culture de l'enfant, il n'est pas possible de l'exprimer de façon concise dans sa langue. On demande donc à l'enfant d'apprendre en même temps un vocabulaire nouveau et un concept nouveau, et ce le plus souvent dans une deuxième langue ;

Une grande partie des concepts présentés ne sont pas renforcés à l'intérieur de l'école parce qu'ils n'ont pas cours dans la communauté aborigène ou sont en conflit avec la coutume établie ;

Les concepts présentés supposent des connaissances et une expérience préalables que l'enfant aborigène n'a pas, et font abstraction des connaissances et de l'expérience différentes qu'il possède ;

En ne tenant pas compte de l'environnement culturel différent de l'enfant aborigène, un tel programme viole également le principe fondamental suivant lequel l'enseignement doit toujours partir du connu et aller du connu à l'inconnu (Harris, 1980).

Ces observations visaient évidemment une situation particulière. Cependant, elles sont plus ou moins applicables *mutatis mutandis,* à toute situation où l'on se sert d'un programme scolaire conçu pour une certaine culture pour élaborer un programme destiné à une autre culture. On peut même dire qu'elles restent valables dans le cas où les deux cultures ont une première langue commune. En effet, l'usage d'une langue au sein d'une même culture ou dans des cultures différentes peut présenter d'importantes variations, même si, en apparence, il s'agit de la même langue (ainsi, les structures linguistiques d'une élite urbaine peuvent différer de celles d'un groupe rural moins instruit).

L'étude de Pam Harris a pour corollaire que l'idée moderne d'un programme de mathématiques de base commun, qui serait limité aux connaissances essentielles nécessaires pour survivre dignement dans la société occidentale, n'est guère qu'un prétexte cachant un jugement de valeur pour imposer à tous, si subtilement que ce soit, les idéaux occidentaux. Les données qu'apporte Pam Harris montrent que les enfants non occidentaux ne reconnaissent pas toujours cette prétendue nécessité d'acquérir les concepts occidentaux. On a constaté, par exemple, que seule une faible proportion des enfants des tribus aborigènes d'Australie âgés de 14 ans savaient lire l'heure sur un cadran d'horloge, alors que, selon le programme de mathématiques qu'ils avaient suivi à l'école, ils auraient dû savoir lire l'heure dès l'âge de 7 ou 8 ans. Pourquoi exiger de gens dont le mode de vie traditionnel ne nécessite pas une mesure précise du temps (au moyen d'instruments occidentaux), qu'ils apprennent à lire l'heure ? On peut se poser la même question à propos de l'acquisition de beaucoup d'autres concepts mathématiques prétendument fondamentaux.

Facteurs linguistiques

Un autre facteur extérieur aux élèves, mais qui influe sur leur compréhension des concepts mathématiques, est la langue utilisée pour

l'enseignement des mathématiques. Dans les ouvrages sur l'enseignement des mathématiques, on fait généralement la distinction entre les élèves qui reçoivent cet enseignement dans leur propre langue et les autres (Austin et Howson, 1979). Nous ferons, nous aussi, cette distinction, en insistant principalement dans la discussion qui va suivre, sur la situation des enfants à qui les mathématiques ne sont pas enseignées dans leur langue maternelle.

Bryan Wilson (1981) a donné récemment un excellent aperçu des politiques adoptées par différentes nations en ce qui concerne la langue d'enseignement. Dans certains pays, les jeunes enfants qui commencent leur scolarité reçoivent dès le début leur instruction dans une langue qu'ils ne parlent pas chez eux. Dans d'autres, on essaie d'instruire les enfants dans leur langue maternelle pendant les premières années de la scolarité pour utiliser ensuite, à un niveau plus élevé, la langue nationale que les enfants n'emploient pas nécessairement en dehors de l'école. Dans d'autres pays encore, on utilise autant que possible la langue vernaculaire des enfants pendant toute la scolarité, même si cela conduit à ne pas employer la langue "nationale" officielle à l'école. D'après Wilson, les décisions concernant la langue d'enseignement à l'école reposent habituellement sur des considérations politiques et non pédagogiques.

Wilson (1981, p. 160) cite une intéressante étude longitudinale effectuée récemment dans les écoles primaires voisines de l'Université d'Ife au Nigéria occidental. Il s'agissait de déterminer si les élèves obtiennent de meilleurs résultats lorsque l'enseignement est donné dans leur langue maternelle pendant toute la durée de la scolarité primaire ou, au contraire, lorsqu'il y a passage à l'anglais au niveau de la quatrième année d'études. Cette dernière modalité correspondait à la politique officielle du pays, mais l'Université fut autorisée à mener, dans quelques écoles, l'expérience consistant à utiliser le yoruba (nom du peuple et de la langue de cette région) comme langue d'enseignement dans les classes expérimentales pendant toute la scolarité primaire. Les textes d'enseignement furent rédigés en yoruba ; on les traduisit ensuite en anglais pour la moitié des écoles, en les laissant en yoruba pour l'autre moitié. On fit passer à tous les élèves le même examen à la fin de la septième année d'études primaires. Le texte des épreuves était rédigé en yoruba, et traduit en anglais pour les élèves qui avaient reçu leur enseignement en anglais. Les résultats montrèrent que tous les élèves qui avaient fait leurs études dans leur langue maternelle réussissaient uniformément mieux à toutes les épreuves. Bien que le plan d'expérience de cette étude soit critiquable (on n'a pas tenu compte, par exemple, de l'effet Hawthorne), les constatations faites au plan du développement cognitif de l'enfant ont des implications importantes en matière de politique linguistique, pour les écoles du monde entier.

La politique adoptée par un pays en ce qui concerne la langue

d'enseignement influe-t-elle sur la capacité des jeunes enfants à appréhender les concepts mathématiques ? Cela ne fait aucun doute. Il suffit d'examiner les programmes de mathématiques prévus dans les différents pays du monde aux niveau-pré-élémentaire et primaire pour être convaincu de l'importance primordiale que la compréhension de la langue par les enfants – et en particulier de la langue d'enseignement des mathématiques – revêt à cet égard (Hollis, 1981). Une enquête réalisée par Peter Jones (1981) en Papouasie-Nouvelle-Guinée illustre parfaitement le type de difficultés conceptuelles qui peuvent résulter d'une mauvaise compréhension des termes mathématiques courants.

Jones a étudié la façon dont les enfants comprenaient des termes comme "plus", "plus que", "moins" et "moins que" au moyen d'un test écrit contenant des questions ouvertes rédigées sous des formes qu'il a appelées "comparative", "directe" et "indirecte". En voici quelques exemples :

1. Qu'est-ce qui vaut plus, 10 ou 13 ? (forme comparative)
2. Qu'est-ce qui vaut moins, 7 ou 9 ? (forme comparative)
3. Qu'est-ce qui vaut 3 de plus que 6 ? (forme directe)
4. Qu'est-ce qui vaut 3 de moins que 5 ? (forme directe)
5. Le nombre 8 vaut 2 de plus que quel nombre ? (forme indirecte)
6. Le nombre 6 vaut 2 de moins que quel nombre ? (forme indirecte)

Jones fit passer son test à des élèves des classes 2 à 10 des écoles locales et des collèges provinciaux et à des élèves des classes 2 à 6 des écoles internationales de Papouasie-Nouvelle-Guinée. Les résultats montrèrent clairement que, si les écoliers des écoles locales aussi bien que ceux des écoles internationales maîtrisaient dès la troisième année de scolarité les questions "comparatives", les élèves des écoles internationales maîtrisaient beaucoup plus tôt que ceux des écoles locales les deux autres formes de questions. Presque tous les élèves des écoles internationales maîtrisaient les questions "directes" dès la cinquième année de scolarité, tandis qu'il fallait attendre la septième année dans le cas des élèves papouans-néo-guinéens des collèges provinciaux. Presque tous les élèves des écoles internationales maîtrisaient les questions "indirectes" dès la septième année de scolarité, mais on ne pouvait en dire autant des élèves des collèges provinciaux, même en dixième année de scolarité.

L'analyse d'erreurs effectuée par Jones a montré que les erreurs les plus courantes commises par les élèves papouans-néo-guinéens en réponse aux questions "directes" résultaient de l'emploi d'une stratégie "comparative". C'est ainsi que "non" et "6" apparaissaient fréquemment comme réponses à la question "Qu'est-ce qui vaut 3 de plus que 6 ?". De même, les erreurs les plus fréquentes commises par les enfants papouans-néo-guinéens en réponse aux questions "indirectes" résultaient de l'emploi d'une stratégie "comparative" ou "directe".

Il n'est pas surprenant, bien sûr, que les enfants papouans-néo-guinéens ne connaissent pas aussi bien les expressions et les termes

anglais que les élèves de l'école internationale qui, pour la plupart, ont l'anglais comme langue maternelle. Or, comme l'anglais est la langue d'enseignement officielle des écoles de Papouasie-Nouvelle-Guinée, il est évident que les problèmes linguistiques doivent être cause d'une déficience conceptuelle en mathématiques. A l'école, presque tous les concepts mathématiques sont inextricablement liés à des concepts linguistiques. Les enfants qui reçoivent leur instruction dans une langue autre que leur langue maternelle sont donc désavantagés dans leur apprentissage des mathématiques. En outre, les programmes de mathématiques des pays où ce problème se pose couramment s'inspirent trop souvent de ceux des pays développés qui ne connaissent pas un problème linguistique aussi aigu, et ils sont de même difficulté. Dans les pays où l'on parle de nombreuses langues, il semble souvent qu'il n'y ait pas d'autre solution viable que d'utiliser une des langues principales comme langue d'enseignement à l'école. Mais, en pareil cas, il faut absolument faire prendre davantage conscience aux auteurs de manuels, aux maîtres et aux organes d'évaluation des difficultés conceptuelles qui, en mathématiques, peuvent être d'origine linguistique, et veiller en outre à ce que les programmes ne soient pas nécessairement calqués sur des programmes étrangers.

Bien que Bryan Wilson (1981, p. 164) ait raison de rappeler que "comme nous l'apprennent les spécialistes de la linguistique, toute langue a un potentiel de développement qui lui permet de faire face à toutes les exigences auxquelles elle est soumise", cela n'implique pas qu'il soit dangereux ou fallacieux d'affirmer que telle ou telle langue présente certaines faiblesses pour ce qui est de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques et des sciences. J'estime, quant à moi que toutes les langues ne sont pas à cet égard également efficaces. Cela ne veut pas dire que je considère certaines langues comme "inférieures" à d'autres ; en effet, comme l'indiquent Bryan Wilson et Pam Harris (1980, p. 75), bien des langues vernaculaires locales permettent souvent d'exprimer clairement et simplement des concepts qui nécessiteraient de bien plus longues descriptions en anglais ou en français.

L'enquête que Glen Lean et moi-même avons menée en Papouasie-Nouvelle-Guinée illustre bien mon argument. Aucune des langues maternelles des divers groupes que nous avons étudiés ne contient de mot désignant le nombre rationnel "un tiers". Il n'y a donc pas d'expression générale pour désigner l'opération consistant à "prendre le tiers" de quelque chose. Par conséquent, on ne pouvait traduire exactement dans la langue maternelle des enfants la question suivante (que la plupart des enfants dont la langue maternelle est l'anglais sont capables de comprendre à partir de la quatrième année d'études primaires) : "Voici six buai. Si tu m'en donnes le tiers, combien m'en donneras-tu ?" Il fallait reformuler la question pour la rendre compréhensible dans la langue maternelle des enfants. Habituellement, cela aboutissait à peu

près à la question suivante, tenue pour équivalente : "Voici six buai. Suppose que tu les partages entre Jack, Luke et Kuni de telle sorte que chacun reçoive le même nombre. Combien chacun en recevra-t-il" ?

Bien que ces deux questions appellent la même réponse, la première est plus difficile, parce qu'elle fait intervenir la forme plus générale du concept "un tiers de", alors que la seconde l'évite. Les spécialistes de pédagogie mathématique ayant pris conscience du rôle de la langue dans l'apprentissage des mathématiques, il en est résulté une tendance à éviter, dans les manuels, les examens et la pratique pédagogique, l'emploi d'expressions mathématiques importantes. Cela est regrettable, car si la reformulation de l'énoncé d'un exercice, comme dans l'exemple précédent, peut permettre aux enfants de trouver la bonne réponse, elle peut aussi, en éludant des concepts essentiels nuire à leur acquisition.

Un problème linguistique très différent, qui contribue aux difficultés conceptuelles que rencontrent les élèves du primaire en mathématiques, est l'ignorance des conventions graphiques. Les cinq dessins au trait de la figure 2 ont été utilisés par un certain nombre de chercheurs dans différentes parties du monde (Deregowski, 1974 ; Bishop, 1979 ; Clements et Lean 1981). On montre les dessins aux enfants et on leur demande de réaliser chacune des figures avec des baguettes et de la pâte à modeler. Dans les pays en développement, il arrive souvent que les écoliers du primaire réalisent des modèles à deux dimensions, et que, s'agissant du cinquième dessin de la figure 2, ils demandent s'ils peuvent casser en petits morceaux les baguettes qu'on leur a données. En soi, de telles démarches n'ont rien d'erroné. Elles émanent simplement d'enfants qui ne sont pas au fait de certaines conventions graphiques que la plupart des enfants des pays développés acquièrent au cours de leurs premières années de scolarité primaire. Rien, dans les dessins de la figure 2, n'indique vraiment aux enfants qu'on leur demande de construire des modèles traditionnels. Les auteurs de manuels et les enseignants de mathématiques des pays en développement devraient être particulièrement attentifs à cet aspect quand ils essaient de faire comprendre aux écoliers les concepts géométriques, en particulier les concepts associés aux solides tridimensionnels.

Des éléments de plus en plus nombreux viennent confirmer l'idée que les différences dans les résultats scolaires obtenus en mathématiques selon les pays et selon les groupes s'expliquent plus facilement par des effets sociaux que par des différences cognitives fondamentales (Kagan

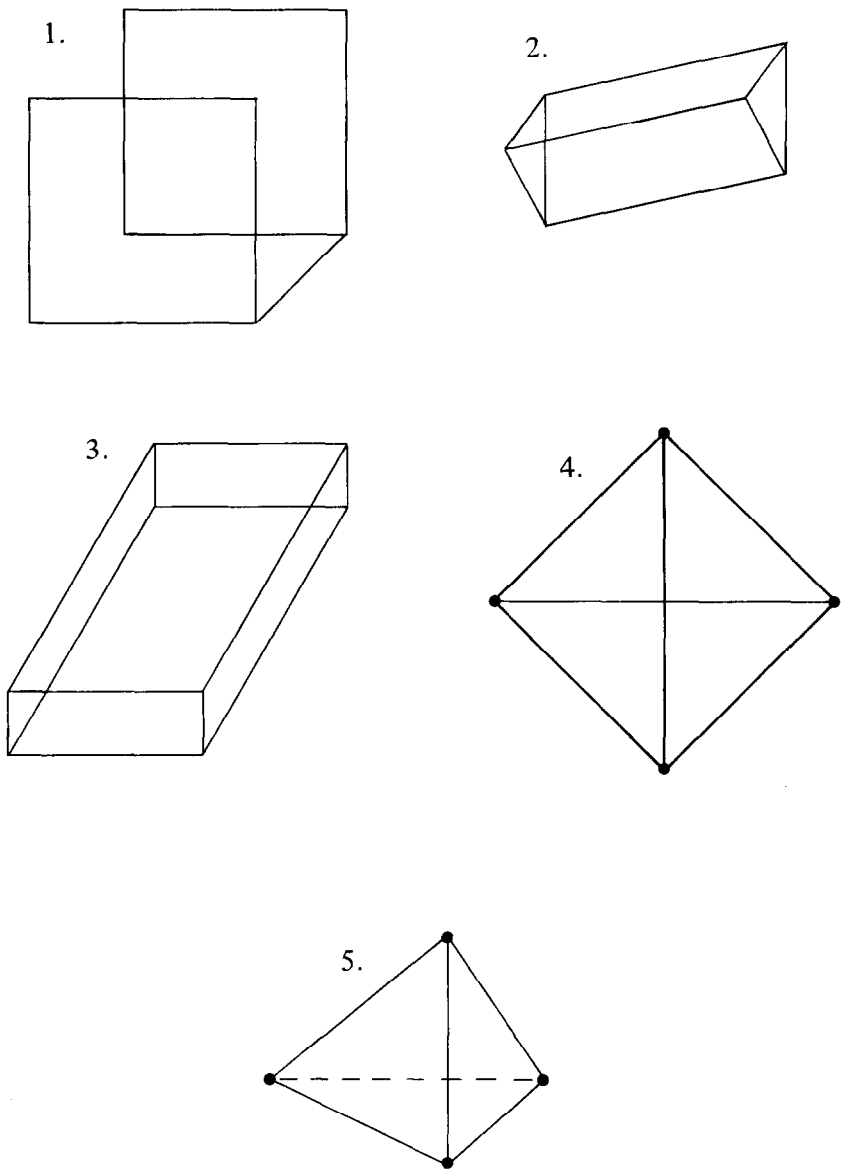


Fig. 2 Cinq dessins pour la construction de modèles avec des baguettes (d'après Deregowski).

et al., 1979 ; Clements et Lean, 1981 ; Lancy, 1978). Ainsi, les enfants qui n'ont pas grandi dans un environnement où les dessins au trait, les photographies et le contact avec l'audiovisuel sont monnaie courante sont désavantagés par rapport aux autres lorsqu'on leur demande d'effectuer des tâches qui nécessitent de reconnaître et d'interpréter les caractéristiques de dessins au trait, de photographies et de documents audiovisuels (Mitchelmore, 1980). De même, si la langue d'enseignement est l'anglais, les enfants dont la langue maternelle n'est pas l'anglais seront désavantagés par rapport aux autres.

Méthodes d'enseignement

La sagesse pédagogique traditionnelle affirme que, quand les enfants n'apprennent pas bien en classe, c'est le plus souvent la faute du maître autant que celle de l'élève. Faisant valoir que cette idée traditionnelle est applicable à l'enseignement des mathématiques, Paul Trafton (1980), énumère les six critères suivants pour un enseignement des mathématiques efficace :

L'enseignement doit être évolutif, c'est-à-dire faire que les notions nouvelles doivent être reliées aux connaissances déjà acquises ;
L'enseignement doit être séquentiel ;
Il faut centrer l'enseignement sur ce que les élèves devront être capables de faire à la suite de leur apprentissage ;
L'enseignement doit favoriser l'activité mentale des élèves ;
L'enseignement doit être cumulatif ;
L'enseignement doit être complet.

On trouve depuis le début du siècle, des articles et des ouvrages de pédagogie offrant de telles listes, et presque toutes les innovations introduites dans les programmes de mathématiques se sont accompagnées de recommandations tendant à modifier également la façon d'enseigner. Pourtant, qui douterait que les conclusions décourageantes formulées récemment par James Fey à propos de l'enseignement des mathématiques aux Etats-Unis d'Amérique ne soient également valables pour la plupart des pays ? Résumant les données recueillies au cours d'une grande enquête nationale sur l'enseignement des mathématiques, Fey (1979) écrit :

> L'image du cours de mathématiques qui émerge des données produites par l'enquête est celle d'une longue séquence d'explications et de questions dirigée par le maître, à laquelle font suite des exercices écrits effectués, sur table, par les élèves. Les études de cas réalisées par la National Science Foundation (NSF) font apparaître une image semblable, voire plus médiocre encore, du déroulement quotidien des classes de mathématiques, à tous les niveaux. En tout cas, les observateurs n'y discernent nulle part l'esprit d'investigation, l'exploration expérimentale ou l'individualisation que recommandent les experts.

Il ajoute que les études de cas et l'enquête font souvent apparaître que les élèves trouvent l'étude des mathématiques ennuyeuse et que l'une des principales difficultés que rencontrent les maîtres est le manque de motivation des élèves. Quand on leur demande pour quels aspects de leur travail ils ont le plus besoin d'aide, les enseignants, à tous les niveaux, citent l'apprentissage de nouvelles méthodes pédagogiques et la mise en oeuvre de méthodes d'approche par la découverte et l'investigation. Cependant, les résultats de recherche et travaux théoriques récents publiés par la National Science Foundation ne donnent guère d'espoir, pour l'immédiat, de voir la recherche pédagogique apporter des idées nouvelles ou étayer de façon convaincante des stratégies ou techniques existantes.

Ce qui ressort des recherches effectuées au cours des années 70, c'est que les grands espoirs que l'on avait placés dans le développement de méthodes individualisées, faisant largement appel à des matériels d'apprentissage programmé suivant le principe stimulus-réponse et à la pédagogie de la maîtrise des connaissances ne se sont pas matérialisés. La brillante étude ethnologique de Stanley Erlwanger (1975) sur la conception des mathématiques chez l'enfant a montré que certains concepts mathématiques posaient des difficultés à certains élèves du primaire à cause de défauts intrinsèques du programme d'enseignement individualisé auquel ils participaient. D'après Erlwanger, le programme avait tendance à imposer aux enfants un rôle passif dans l'apprentissage, à entraver le développement de leur intuition, à donner au maître et à l'élève des rôles antagoniques et à supprimer des pratiques scolaires traditionnelles comme les explications du maître et la participation du groupe. Erlwanger a montré en particulier, que ce programme, qui en apparence satisfait à tous les critères habituels d'un bon système d'apprentissage individualisé, conduisait les enfants à ne voir dans les mathématiques qu'un ensemble de règles permettant de cocher des réponses et de donner des résultats conformément à des méthodes rigides. Aucun lien n'était établi entre les mathématiques scolaires et les notions intuitives relatives aux sujets étudiés. Les enfants justifiaient invariablement leur démarche par référence aux règles prescrites pour la manipulation des symboles. Ils tendaient à opposer une certaine résistance à tout enseignement correctif faisant intervenir des méthodes différentes de celles que présentaient au départ les matériels individualisés. Peu de place étant faite à l'acquisition des concepts généraux, il en résultait de sérieuses insuffisances conceptuelles auxquelles il n'était pas facile de remédier.

Le travail de recherche d'Erlwanger a de nouveau fait ressortir l'importance pour l'assimilation des concepts mathématiques, d'une interaction permanente entre le maître et l'élève. Comme Heinrich Bauersfeld (1980) l'a écrit, "l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques se font par l'interaction humaine". Selon Bauersfeld,

le premier contact de l'élève avec un concept mathématique a lieu par l'intermédiaire des parents, des camarades et des maîtres. La reconstruction par l'élève du contenu mathématique de concept (processus essentiel pour une compréhension correcte) est une construction – qui progresse sous l'effet d'interactions sociales – de la signification du concept et de l'interprétation qui a la sanction du maître (ou des pairs). De ce point de vue, les systèmes individualisés qui étaient à la mode au cours des années 60 et au début des années 70 avaient le grave défaut de ne pas s'attacher suffisamment à l'enseignement et à l'apprentissage des concepts, parce qu'ils négligeaient la reconstruction interactive de leur signification par chaque elève.

Malgré le pessimisme implicite des observations qui précèdent quant à la possibilité d'améliorer l'apprentissage des concepts par une réforme générale des méthodes d'enseignement des mathématiques, il est encourageant de constater qu'on essaie actuellement un peu partout dans le monde d'élaborer des éléments de programme, assortis d'une pédagogie pratique appropriée, qui permettent aux enfants d'acquérir les concepts importants par un apprentissage en accord avec leur culture. Le Indigenous Mathematics Project [Projet de mathématiques indigène] mis en oeuvre en Papouasie-Nouvelle-Guinée en est un remarquable exemple. Le rapport final de ce projet, avec des contributions importantes de spécialistes de la pédagogie de mathématiques, d'enseignants, d'anthropologues et de psychologues, nationaux et étrangers, concluait que l'introduction rapide de manuels bien adaptés élaborés dans le pays même pour l'enseignement dans les classes 4, 5 et 6 (quatrième, cinquième et sixième années), ainsi que de livres du maître détaillés pour les classes 1, 2 et 3 (première, deuxième et troisième années), conjuguée à l'emploi d'un matériel pédagogique auxiliaire minimum et à un recyclage approprié des maîtres, aurait un effet significatif sur la compétence des enseignants et les résultats des élèves. D'après Randall Souviney (1980), qui a dirigé le projet de mathématiques indigène entre 1979 et 1981, les résultats de l'expérimentation des nouveaux matériels d'enseignement et du recyclage ont été encourageants. De tels projets, qui visent à améliorer de façon appréciable l'enseignement des mathématiques au niveau d'une nation entière, sont ambitieux, mais on ne saurait nier qu'ils évitent à de nombreux enfants d'inutiles difficultés conceptuelles dans cette discipline. En effet, comme le remarque David Lancy (1978), la recherche semble actuellement confirmer le fait que la scolarité peut accélérer le passage à la pensée symbolique. Cependant, si les enfants n'ont pas suffisamment d'occasions d'activités pratiques, parce que le maître dirige la classe de façon rigide, par exemple, et consacre trop de temps au cours magistral, cette accélération de leur développement cognitif risque d'être compromise.

L'un des principaux problèmes ayant une incidence sur la qualité de

l'enseignement des mathématiques à l'école primaire tient, dans le monde entier, au fait que trop de maître ne possèdent en mathématiques qu'une qualification minimale. En outre, ils ont souvent une attitude négative et étriquée à l'égard de cette matière. Aux Etats-Unis d'Amérique, par exemple, beaucoup d'instituteurs ou d'institutrices se comportent comme s'ils croyaient avoir pour seule mission, en enseignant les mathématiques, de développer l'aptitude au calcul arithmétique (Fey, 1979, p. 19). Pour résoudre ce problème, il faut que les responsables de l'éducation nationale commencent par exiger un niveau plus élevé en mathématiques pour l'admission dans les instituts de formation des maîtres de l'enseignement primaire. La deuxième mesure consiste à obliger tous les élèves-maîtres à suivre des cours de mathématiques ainsi que de méthodologie mathématique dans le cadre de leur formation. La troisième mesure consiste à demander aux maîtres en exercice de suivre de temps en temps des cours de perfectionnement traitant de façon assez approfondie aussi bien de mathématiques que de questions de pédagogie des mathématiques. Cependant, il s'est souvent avéré, dans différentes régions du monde, que les diverses initiatives à prendre pour réussir à faire inscrire ces exigences dans la législation de l'enseignement dépassaient le capacité des spécialistes de la pédagogie des mathématiques.

Facteurs internes des difficultés conceptuelles que rencontrent les élèves du primaire en mathématiques

Au cours des années 70, la tendance des spécialistes de psychologie transculturelle à affirmer que les aptitudes cognitives sont fondamentalement différentes selon les races a marqué un recul, tandis que de nombreux chercheurs (Stevenson *et al.*, 1978) rapportaient des faits tendant à prouver que les composantes fondamentales des processus cognitifs ne présentent pas de différences culturelles. Il est donc peu probable qu'il existe un groupe culturel totalement incapable d'une démarche fondamentale comme l'abstraction, le raisonnement déductif ou la catégorisation. D'après l'étude de Ginsburg, Russel et Posner (1981) sur l'acquisition des techniques arithmétiques chez les enfants africains et américains, l'analyse du cheminement suivi par les enfants pour résoudre des problèmes d'addition simples montre que les enfants de Côte d'Ivoire éprouvent le même type de difficultés que leurs camarades américains. Des études indépendantes, dues à David Lancy (1978, p. 135) et Glen Lean et moi-même (Clements et Lean, 1981, p. 23), et comportant l'administration de différentes batteries de tests cognitifs à des enfants papouans-néo-guinéens et à des enfants blancs

élèves des écoles internationales de Papouasie-Nouvelle-Guinée, ont montré que les différences significatives qui pouvaient apparaître entre les groupes s'expliquaient facilement par des facteurs comme la langue et l'environnement familial. Espérons que les professeurs de mathématiques et les autres personnes qui pensent que les membres de certains groupes ne sont pas capables des raisonnements complexes nécessaires aux mathématiques de niveau plus élevé seront informés des résultats de ces recherches et d'autres constatations semblables signalées dans de nombreuses régions du monde.

Néanmoins, il serait absurde de nier que les facteurs culturels jouent un rôle extrêmement important dans les résultats obtenus en mathématiques. Gay et Cole (1967), par exemple, ont avancé que la raison fondamentale qui empêchait les enfants kpelle de réussir à l'école était leur déférence inconditionnelle à l'égard du savoir des adultes. Si cette attitude peut être nécessaire pour survivre dans le contexte du village traditionnel, à l'école elle est évidemment stérile. Comme le dit Randall Souviney (1981, p. 1) :

> Sans l'outil scientifique qui consiste à commencer par réserver son jugement, cependant qu'on se livre à une analyse objective, la masse d'informations nouvelles rencontrées à l'école est vouée à demeurer une collection de données factuelles mystérieuses, sans lien les unes avec les autres. Le maître doit donc aider l'enfant à traduire les notions mathématiques occidentales à l'aide d'analogues tirés de son propre vécu et à étendre, chaque fois que c'est nécessaire, ces notions pour définir les concepts qui ne sont pas immédiatement exprimables dans les termes locaux.

Il est presque certain que Pam Harris amenderait ainsi cette assertion : on doit déterminer judicieusement les notions mathématiques occidentales qu'il est nécessaire de traduire en termes locaux, et les critères de choix ne doivent pas être laissés uniquement ou essentiellement à l'appréciation d'Occidentaux.

Les facteurs externes, c'est-à-dire les facteurs sur lesquels l'élève n'a pas de prise, engendrent donc souvent des facteurs internes qui ont une incidence sur l'aptitude d'un individu à appréhender les mathématiques. Si, par exemple, les enfants vivent dans un village où la notion occidentale d'unité de mesure fixe est en grande partie inconnue, il leur faudra un certain temps pour saisir cette notion quand ils la rencontreront, le cas échéant, dans l'enseignement des mathématiques qui leur sera dispensé par l'école primaire de leur village (Jones, 1974). Ce que la psychologie cognitive moderne permet de comprendre facilement. D'après Robert Gagné et Richard White (1978), les élèves, quand ils essaient d'assimiler une information nouvelle, font appel à des informations de diverses sortes déjà présentes dans leurs structures mnémoniques, où elles sont stockées sous forme de connaissances factuelles, de techniques intellectuelles, d'images et d'épisodes. La remémoration ainsi que la construction et la reconstruction intellectuelles nécessaires pour

saisir un nouveau concept seront plus faciles si les stimuli qui déterminent la réflexion sur ce concept contribuent à établir des liaisons appropriées entre les informations existant dans les structures cognitives de l'enfant. Il n'est donc pas surprenant, lorsqu'on présente aux enfants des concepts qui, d'un point de vue relatif, sont largement étrangers à leur expérience quotidienne extrascolaire, qu'ils aient du mal à établir les liaisons nécessaires. De ce point de vue, les constatations des spécialistes de la psychologie interculturelle du développement sont sujettes à caution, car ils utilisent souvent des épreuves entachées de préjugés culturels, telles que les épreuves de conservation de Piaget, qui font souvent apparaître les enfants des pays en développement comme ayant plusieurs années de retard dans leur développement cognitif par rapport à leurs camarades des pays développés.

Ces recherches ne révèlent sans doute rien de plus que le fait que les structures cognitives de ces enfants n'offrent pas les relations nécessaires aux tâches proposées par les psychologues qui essaient d'évaluer le niveau de développement cognitif des enfants. Si les concepts que ces épreuves mettent en jeu sont importants pour les mathématiques scolaires, une des fonctions du maître de mathématiques doit être de créer en classe un contexte favorable à l'apprentissage de ces concepts. Les spécialistes de la pédagogie des mathématiques ont sans doute accordé trop d'attention à des recherches de valeur douteuse, menées un peu partout dans le monde par quantité de spécialistes de la psychologie interculturelle du développement.

Au cours des vingt dernières années, on a utilisé un certain nombre de variables du style cognitif pour expliquer les différences individuelles de mode d'apprentissage. La représentation de Witkin – dépendance du champ/indépendance du champ –, est probablement la plus connue, bien que les représentations impulsif/réfléchi et visuel/verbal constituent d'autres aspects de la cognition utilisées par les spécialistes de la pédagogie des mathématiques pour expliquer l'acquisition des concepts mathématiques chez les enfants. Il n'est pas possible de rendre compte ici de tous les travaux concernant ces variables du style cognitif. Cependant, et bien que j'aie moi-même employé des variables du style cognitif dans mes propres recherches, je souhaite mettre en garde les spécialistes de la pédagogie des mathématiques contre leur utilisation excessive. Si l'on n'y prend garde, on verra des psychologues et pédagogues se précipiter dans tous les coins du monde pour organiser des tests de style cognitif, et les données recueillies seront tout aussi difficiles à interpréter de façon sensée que celles qu'obtiennent depuis vingt ans la multitude de psychologues du développement qui font passer des épreuves de conservation et d'autres épreuves de Piaget aux enfants de différentes régions du monde.

Résumé

Passant en revue les travaux publiés sur les causes des difficultés conceptuelles que les jeunes élèves rencontrent en mathématiques, nous nous sommes d'abord attaché plus particulièrement à la définition du concept mathématique et aux conséquences à en tirer pour ce qui est de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire. Nous avons souligné la nécessité, pour les maîtres, de bien mettre en lumière les caractères déterminants des principaux concepts et de fournir aux enfants des référents concrets dans lesquels tous les caractères déterminants soient immédiatement apparents. S'il est bon de présenter aux jeunes enfants plusieurs représentations concrètes d'un même concept, un trop grand nombre de représentations peut les égarer. La présentation de non-exemples, notamment de référents concrets possédant certains caractères déterminants de concepts enseignés, mais pas tous, constitue habituellement une bonne stratégie pédagogique.

Nous avons soutenu que si les enfants ne sont pas capables de renconnaître des situations simples mettant en jeu les concepts enseignés, c'est qu'ils n'ont pas compris ces concepts. Les instituteurs doivent donc veiller à ce que leurs élèves sachent quand il convient d'appliquer les concepts, dans les situations familières et dans des situations simples non familières, tout autant – sinon plus – qu'à leur connaissance des données numériques élémentaires et des algorithmes arithmétiques.

Nous avons divisé notre discussion des causes des difficultés conceptuelles en deux parties. La première, et la plus importante, traite des facteurs externes : les facteurs qui affectent la compréhension des concepts par les élèves, mais qui échappent complètement à leur contrôle. La deuxième partie traite surtout des facteurs internes : les facteurs associés au développement cognitif, affectif et social des élèves considérés individuellement.

A propos des facteurs externes, les principaux points concernent les programmes scolaires ainsi que la langue et les méthodes d'enseignement. Nous avons émis l'avis que, dans la plupart des pays, les programmes de mathématiques du primaire contiennent des sujets trop difficiles pour beaucoup d'enfants, compte tenu de leur degré de maturité. Nous avons fait remarquer, en particulier, que les programmes scolaires des pays en développement sont trop souvent calqués sur les programmes occidentaux et que cette politique non seulement est cause de difficultés conceptuelles mais risque aussi de porter gravement préjudice à la culture traditionnelle de ces pays. L'idée moderne d'un programme de base commun en mathématiques n'est guère en fait qu'un prétexte cachant un jugement de valeur pour imposer à tous, si subtilement que ce soit, les idéaux occidentaux.

La politique appliquée par un pays en ce qui concerne le choix de la langue d'enseignement a une incidence sur l'aptitude des jeunes enfants à tirer profit de l'enseignement des mathématiques qu'ils reçoivent. Cependant, il n'existe pas de solution universelle à ce problème linguistique, d'autant que les décisions prises à ce sujet reposent habituellement sur des considérations politiques et non pédagogiques. La reconnaissance, par les spécialistes de la pédagogie des mathématiques, de l'importance des facteurs linguistiques dans l'apprentissage des mathématiques a pour conséquence regrettable une tendance à éviter l'emploi, dans les manuels, les examens et la pratique pédagogique, d'expressions mathématiques fondamentales. Le résultat est que les enfants ne connaissent pas la terminologie mathématique essentielle, ce qui entrave aussi leur acquisition des concepts mathématiques.

L'expérimentation pratique de nouvelles méthodes d'enseignement a donné des résultats décevants. Rien n'indique que les enfants assimilent les concepts mathématiques plus facilement aujourd'hui qu'autrefois. En particulier, les espoirs qu'on avait placés dans l'apprentissage programmé et dans les systèmes d'enseignement individualisé fondés sur la pédagogie de la maîtrise des connaissances ne se sont pas matéralisés. L'interaction humaine semble être la clef du succès de l'enseignement et de l'apprentissage des concepts mathématiques.

Bien que les spécialistes de méthodologie ne cessent de rappeler qu'il est indispensable que les jeunes enfants participent de façon active à l'apprentissage des mathématiques dans les grandes classes du primaire, l'enseignement des mathématiques est, un peu partout dans le monde, dominé le plus souvent par le maître. Les enfants ont rarement la possibilité d'examiner des représentations concrètes des concepts. L'accent est mis presque exclusivement sur des exercices répétitifs, portant surtout sur les données numériques factuelles et les algorithmes arithmétiques. La situation est souvent meilleure dans les petites classes. Il est encourageant de constater que certains pays ont entrepris de doter les écoles primaires de matériels qui devraient permettre d'améliorer l'enseignement des mathématiques dans les grandes classes du primaire (par exemple, en Papouasie-Nouvelle-Guinée, dans le cadre du projet de mathématiques indigène).

Nous avons formulé trois recommandations visant à améliorer l'enseignement des mathématiques dans le primaire : exiger des futurs instituteurs un niveau de qualification plus élevé en mathématiques ; obliger tous les élèves-maîtres à suivre, dans le cadre de leur formation, des cours de mathématiques et de méthodologie mathématique ; exiger des instituteurs en exercice qu'ils suivent, de temps en temps, des stages de perfectionnement traitant de façon assez approfondie aussi bien de mathématiques que de pédagogie des mathématiques.

Enfin, dans notre examen des facteurs internes des difficultés

conceptuelles, nous avons souligné que les facteurs internes ont souvent pour origine des facteurs externes. Les recherches interculturelles les plus récentes montrent qu'il n'existe pas de différences entre les cultures pour ce qui est des facultés cognitives fondamentales. Il semble peu probable qu'un groupe culturel quelconque soit totalement incapable de démarches logiques fondamentales comme l'abstraction, le raisonnement déductif ou la catégorisation. Les facteurs culturels n'en ont pas moins une incidence sur la plus ou moins grande faculté d'acquisition des concepts mathématiques par l'enfant. Il appartient donc au maître d'aider les enfants à comprendre les concepts en les reliant à leur vécu quotidien. Il faut, pour user du jargon de la psychologie cognitive moderne, extraire les épisodes, les images, les connaissances et les techniques intellectuelles appropriées qu'un enfant recèle dans sa mémoire, en lui apportant des expériences d'apprentissage qui conviennent. Il est vraisemblable, cependant, que seuls des maîtres qualifiés, ayant une bonne connaissance à la fois des mathématiques et de la façon dont les enfants appréhendent les mathématiques, sont capables de fournir systématiquement aux enfants de telles expériences.

Références

AUSTIN, J. L. ; HOWSON, A. G. 1979. Language and Mathematical Education. *Educational Studies in Mathematics* (Dordrecht) Vol. 10, No. 2, pp. 161–197.

BAUERSFELD, H. 1980. Hidden Dimensions in the So-Called Reality of Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics,* (Dordrecht) Vol. 11, No. 1, pp. 23–41.

BISHOP, A. J. 1979. Visualising and Mathematics in a Pre-technological Culture. *Educational Studies in Mathematics* (Dordrecht) Vol. 10, No. 2, pp. 135–146.

CLEMENTS, M. A. (Ken) 1980. Analysing Children's Errors on Written Mathematical Tasks. *Educational Studies in Mathematics* (Dordrecht) Vol. 11, No. 1, février, pp. 1–21.

CLEMENTS, M. A. ; LEAN, G. A. 1981. *Influences on Mathematical Learning in Papua New Guinea – Some Cross-cultural Perspectives.* Lae, Papua New Guinea University of Technology. 75p. (Rapport, No. 13).

DEREGOWSKI, J. B. 1974. Teaching African Children Pictorial Depth Perception : In Search of a Method. *Perception,* Vol. 3, pp. 309–312.

DIENES, Z. P. 1971. *Building up Mathematics.* 4ème éd. Londres, Hutchinson.

ERLWANGER, S. H. 1975. Case Studies of Children's Conceptions of Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior* (Champaign, Ill.), Vol. 1, pp. 157–281.

FEY, J. T. 1979. Surveying Today's Mathematics Teaching. *The Education Digest* (New York), décembre, pp. 19–22.

GAGNÉ, R. M. ; WHITE, R. T. 1978. Memory Structures and Learning Outcomes. *Review of Educational Research,* Vol. 48, No. 2, pp. 187–222.

GAY, J. ; COLE, M. 1967. *The New Mathematics and an Old Culture.* New York, Holt, Rinehart and Winston. 100 pages.

GINSBURG, H. ; RUSSELL, R. ; POSNER, J. 1981. Mathematics Learning Difficulties in African Children : A Clinical Interview Study. *Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition* (University of California at San Diego), Vol. 3, No. 1.

HARRIS, P. 1980. *Measurement in Tribal Aboriginal Communities.* Darwin, Northern Territory Department of Education. 142 pages.

HOLLIS, L. Y. 1981. Mathematical Concepts for very Young Children. *Arithmetic Teacher* (National Council of Teachers of Mathematics), Vol. 29, No. 2, octobre, pp. 24–27.

JONES, J. 1974. *Quantitative Concepts, Vernaculars, and Education in Papua New Guinea.* Port Moresby, University of Papua New Guinea Educational Research Unit. (Report, No. 12).

JONES, P. L. 1981. *Learning Mathematics in a Second Language : A problem with More and Less.* Lae, Papua New Guinea University of Technology. 24 pages (Report No. 19).

KAGAN, J. ; KLEIN, R. E. ; FINLEY, G. E. ; ROGOFF, B. ; NOLAN, E. 1979. A Cross-cultural Study of Cognitive Development. *Monographs of the Society for Research in Child Development* (New York), Vol. 44, No. 5.

LANCY, D. 1978. Cognitive Testing in the Indigeneous Mathematics Project. *Papua New Guinea Journal of Education* (Port Moresby) Vol. 14, pp. 114–142.

MITCHELMORE, M. 1980. Three-dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures. *Educational Studies in Mathematics* (Dordrecht) Vol. 11, No. 2, pp. 205–216.

SKILBECK, M. 1976. The Curriculum as a Cultural Map. Dans : M. Skilbeck et A. Harris, *Culture Ideology and Knowledge.* Londres, Open University, 100 pages.

SOUVINEY, R. 1980. *Teaching and Learning Mathematics in the Community Schools of Papua New Guinea.* Lae, Papua New Guinea Department of Education. (Indigeneous Mathematics Project, document de travail, No. 20).

STEVENSON, H. W. ; PARKER, T. ; WILKINSON, A. ; BONNEVAUX, B. ; GONZALES, M. 1978. Schooling, Environment and Cognitive Development : A Cross-cultural Study. *Monographs for the Society for Research in Child Development* (New York), Vol. 43, No. 3.

SWETZ, F. 1974. *Mathematics Education in China.* Cambridge (Mass.) MIT Press.

TRAFTON, P. R. 1980. Effective Instruction and Productive Learning. *Arithmetic Teacher* (National Council of Teachers of Mathematics), Vol. 28, No. 2, octobre, p. 4.

Unesco, 1981. *Etudes sur l'enseignement des mathématiques,* Vol. 2, préparé sous la direction de R. Morris. Paris, Unesco.

VINNER, S. ; HERSHKOWITZ, R. 1980. Concept Images and Common Cognitive Paths in the Development of some Simple Geometrical Concepts. Dans : Karplus, Robert (dir. pub.), *Proceedings of the Fourth International Congress for the Psychology of Mathematics Education,* pp. 177–184, Berkeley, Calif., University of California at Berkeley.

WILSON, B. 1981. Language and Mathematics Education. Dans : P. Clarkson, (dir. pub.), *Research in Mathematics Education in Papua New Guinea, 1981,* pp. 154–166. Lae, Papua New Guinea University of Technology.

Michele Pellerey

Aspects de la visualisation dans l'enseignement de la géometrie et réflexions sur le cas de l'enseignement de la symétrie à l'école primaire

Le processus de géométrisation

Ces dernières années, l'attention des didacticiens de l'enseignement primaire s'est déplacée de la connaissance mathématique et des théories sur la façon de l'enseigner vers l'étude des processus cognitifs par lesquels les élèves apprennent. Autrement dit, on s'attache désormais davantage à l'action pédagogique qu'aux résultats. Mieux vaut sans doute opter pour un moyen terme et se concentrer sur l'étude d'activités mathématiques isolées.

Il semble en effet qu'il y ait une différence "situationnelle" entre la formation des concepts géométriques et celle des concepts de nature probabiliste. Les développements qui en résultent sont substantiellement différents. A. Z. Krygowska, distinguant la mathématisation au plein sens du terme de la mathématisation au niveau de l'initiation, définit cette dernière comme "la construction d'un schème mental portant sur certaines relations réelles qui ne peut encore être retenu comme schème mathématique authentique et ne peut donc être intégré à une théorie mathématique, mais dont la construction est orientée d'emblée vers une mathématisation authentique". Il serait intéressant d'analyser en détail les facteurs qui interviennent dans cette forme initiale de mathématisation, les images mentales et, d'une manière générale, tous les processus de visualisation. Pareille analyse serait cependant longue et complexe. Nous nous limiterons donc à l'étude de la construction des schèmes qui ressortissent plus ou moins directement aux concepts et aux théories de type géométrique ; en nous référant plus particulièrement, pour illustrer notre étude, au concept de symétrie.

La recherche psychologique s'est intéressée ces vingt dernières années aux processus cognitifs et a souvent mis en évidence de façon intéressante, le rôle particulier des images, dans la mémoire à long terme (mémoire de stockage) ou dans la mémoire à court terme (mémoire d'exploitation). En particulier, dans l'activité perceptuelle, une forme schématique de réalité semble s'accomplir. Cela s'effectue sous la conduite de schémas déjà présents dans la mémoire, ou de schémas que

le maître révèle en mettant l'accent sur des éléments ou des relations appropriés. Ces schémas orientent l'attention de façon sélective : ils agissent comme un filtre à l'égard des stimuli sensoriels et servent de base pour les organiser en un schème significatif. A partir de la masse d'informations enregistrée par les récepteurs sensoriels, les schémas qui conviennent au problème ou à la situation étudiée se dégagent et sont ensuite structurés de façon appropriée et intellectuellement féconde.

Outre le stock d'images mentales, il y a ce qu'on appelle la mémoire sémantique. Cette mémoire a pour fonction non seulement d'attribuer un nom ou un symbole à un schème perceptif, mais aussi de le doter d'une signification, en le reliant à l'expérience antérieure, aux utilisations possibles ou à d'autres schèmes et concepts, soit plus généraux, soit plus spécifiques.

Le processus cognitif, qui, à partir d'une région du cerveau, consiste à recevoir et à structurer l'information sensorielle et, à partir d'une autre, extrait de la mémoire à long terme les schémas signifiants et structurants pour les utiliser, se déroule dans la mémoire à court terme. Cela signifie qu'il s'agit d'une activité menée de façon consciente et intellectuellement contrôlée. Il en est de même quand nous avons affaire à des formes de représentation organisées de façon cohérente. Si les schèmes intellectuels et leurs représentations peuvent être rapportés à la théorie géométrique (ou à une de ses parties), l'activité devient alors une authentique activité de géométrisation.

Néanmoins, il importe de ne pas oublier le rôle et l'influence qui, du fait des significations, s'attachent plus ou moins directement à ces schèmes intellectuels. Par son vécu familial et social, et par la communication, l'enfant a déjà accumulé des images, des interprétations, des jugements et des utilisations qui peuvent tous être reliés au processus d'apprentissage en cours. Dans l'activité de géométrisation, surtout au niveau de l'initiation, il faut tenir compte, pour chaque élève, de la partie de la mémoire sémantique déjà organisée.

Les images profondes de la symétrie

Il est désormais assez courant de faire étudier aux élèves de l'école primaire la notion de symétrie axiale ou de symétrie centrale. On commence parfois, dans les manuels scolaires, par définir – à l'aide de figures appropriées – ce qu'il faut entendre par deux points placés symétriquement par rapport à une droite ou par rapport à un troisième point, puis on étend graduellement cette notion aux figures symétriques et leurs propriétés, à la distinction entre les figures directement ou inversement égales, aux transformations géométriques du plan et à la composition de plusieurs transformations.

Mais comment établir le lien entre ces notions et l'esprit de l'enfant, en particulier son monde intérieur, qui s'est créé et organisé sous l'influence de la communication familiale et sociale ? La symétrie, on ne doit pas l'oublier, est une image profonde, une catégorie conceptuelle qui a dominé et domine encore de nombreuses cultures. Ces cultures – la culture italienne, par exemple, issue de la culture gréco-romaine – conservent en la matière l'empreinte de milliers d'élaborations abstraites et de matérialisations concrètes, qui ne peuvent s'effacer.

Parmi les premières et les plus profondes notions intuitives de la symétrie figure l'idée de stabilité, qui s'oppose à celle de mouvement ou de croissance. La stabilité exprime l'ordre, la tranquillité, la rationalité, l'équilibre. Le mouvement, au contraire, suggère le désordre, l'inquiétude, l'émotivité, le déséquilibre. L'image la plus féconde de la symétrie est celle de la balance de laboratoire (trébuchet), caractérisée par un équilibre dynamique et une symétrie entre ses parties. Placer les choses correctement par rapport à un point de référence est signe de calme et de paix. L'homme sage se place dans une position d'équilibre entre les extrêmes. Sa sérénité résulte de la maîtrise de ses tensions et de ses émotions.

Une idée voisine de cette grande catégorie est celle de l'équilibre moral de la justice individuelle et sociale. La même balance est le symbole le plus répandu de la justice. Cependant, ce schème renferme aussi des éléments d'asymétrie : la droite représente la raison, le bien, la vertu, et la gauche la passion, le mal, le vice ; le jugement rendu devra rétablir l'équilibre de cette balance asymétrique. Dans les traditions européennes populaires, il subsiste encore un préjugé négatif à l'égard des gauchers et de l'usage de la main gauche considérée comme "la main du diable".

La catégorie esthétique fonctionne en contrepoint de la catégorie morale. La symétrie est ici synonyme d'harmonie et d'équilibre des parties, des formes et des couleurs. La beauté en découle, Polyclète et Dürer, que séparent presque deux mille ans, ont tous deux écrit des traités d'esthétique fondés sur le concept de proportion. Le temple grec comme la cathédrale gothique reposaient sur la symétrie et sur l'expression esthétique et religieuse, même si l'un des styles est plus terrestre, et l'autre plus céleste. On peut tenir un discours analogue à propos de la peinture, de la sculpture, de la danse, de l'art dramatique, etc. où le dynamisme et la nature passionnée des formes asymétriques contraste fortement avec la sérénité et l'harmonie des formes symétriques.

L'enfant entre en contact avec tout cela par l'intermédiaire de ses parents, de ses frères et soeurs, de ses camarades et de la ville, grande ou petite, où il habite. Il intériorise au moins ces images profondes, ces intuitions primitives, par la communication linguistique et l'expérience visuelle. Les maximes, affirmations, jugements, ordres et appréciations esthétiques et morales intègrent les stimuli provenant du contact avec l'environnement, l'architecture ou la ville, etc. Ils s'inspirent plus ou moins directement d'une très longue tradition culturelle dont

l'enfant hérite.

Un autre contexte où la symétrie joue un rôle extraordinaire est celui du corps. L'existence dans le corps humain d'un plan de symétrie vertical (et non horizontal) pose de délicats problèmes de développement, liés à la formation du schéma corporel ou au processus de latéralisation. D'ailleurs, beaucoup de jeux d'enfants traditionnels sont révélateurs d'un bon développement dans l'un ou l'autre de ces deux domaines : l'enfant qui essaie de marcher en équilibre sur une planche ou sur une bordure de gazon, fait personnellement l'expérience de l'équilibre et de tout ce qu'il évoque.

La représentation visuelle de la symétrie

Souvent, l'activité scolaire des petites classes fait intervenir le concept de symétrie, sous sa forme la plus générale, sans que la maître se donne la peine d'expliciter cette notion. Il en résulte des difficultés de compréhension et donc des erreurs d'interprétation et d'exécution. Les opérations arithmétiques en fournissent un exemple courant. L'emploi du concept d'égalité, et du concept voisin d'équivalence, présuppose la catégorie conceptuelle de symétrie. Toutes les définitions de l'égalité et de l'équivalence (par la propriété de symétrie) le prouvent. Par conséquent, l'égalité évoque immédiatement une image de stabilité et d'équilibre. Pour faciliter l'établissement de ce lien, on propose souvent l'image de la balance. On utilise d'ailleurs souvent, pour illustrer l'égalité, une balance dont les bras sont munis de crochets pour suspendre des poids. D'autre part, quand on aborde les expressions arithmétiques, les opérations de développement tendent en général à rendre évidente l'égalité entre le premier et le second membre de l'expression elle-même.

Mais le concept d'opération, sous sa forme première la plus profonde et la plus intuitive, se rapproche davantage du concept général de mouvement, de transformation ou de passage d'une situation à une autre (qui est lui-même un événement produit par une forme de déséquilibre telle que les expériences de la vie sociale ou les phénomènes techniques ou naturels). Aussi, certains didacticiens ont-ils recommandé récemment qu'on adopte pour les opérations un symbolisme différent, en remplaçant les signes d'égalité par des flèches. La tendance à fonder le concept d'opération arithmétique sur celui de fonction, au lieu de le faire correspondre à des opérations logiques, gagne du terrain. Il en va de même du concept de nombre naturel, qu'il est plus utile de situer dans le cadre du concept de fonction récursive.

Il importe de bien mettre en lumière ces deux aspects, faute de quoi l'exécution des tâches de nature arithmétique, même faciles, risque de donner lieu à de nombreuses erreurs. On pourrait faire valoir des con-

sidérations analogues dans le cas du concept d'équivalence géométrique et des autres concepts voisins.

Ces brèves remarques justifient déjà qu'on consacre la place et le temps nécessaires à une bonne compréhension et à une représentation valable du concept de symétrie. En l'occurence, le processus de visualisation tend à extraire l'image profonde de symétrie de la mémoire à long terme de l'élève (où elle est déjà présente d'une certaine façon même si c'est confusément) et à la faire monter jusqu'au niveau de la mémoire à court terme, c'est-à-dire de la conscience. Cela favorise la montée parallèle d'une activité perceptuelle utile. L'extraction hors de la mémoire de stockage et l'activité perceptuelle conduisent à une objectivation de l'idée intuitive de symétrie par l'intermédiaire d'un système de signes externes. Le processus de géométrisation, dans ce cas, consiste à fournir à l'élève un système de signes représentatifs valables et cohérents. Ces signes, d'une part permettent la clarification et la précision conceptuelle et, de l'autre, engendrent une liaison plus ou moins immédiate avec un secteur de la théorie mathématique de type géométrique.

Il est possible de développer progressivement chez l'enfant la représentation visuelle de la symétrie, sous la forme d'une figure disposée symétriquement par rapport à un axe, en partant de situations et d'activités concrètes. Néanmoins, il faut insister sur la nécessité de la schématisation graphique. D'après Gonseth, le schéma graphique réunit à la fois l'abstraction tirée de la situation décrite et la concrétisation de ce que l'enfant a dans l'esprit. Le schéma comporte deux aspects : un aspect abstrait par rapport à la réalité perçue, et un aspect concret par rapport à ce que l'élève pense. La visualisation, par l'intermédiaire d'un schéma géométrique, procède de l'organisation perceptuelle des stimuli sensoriels, et de la remémoration et de l'utilisation des images conservées dans la mémoire à long terme.

La visualisation par le moyen d'un schéma graphique de type géométrique (relié ensuite sans difficulté à un élément théorie mathématique) permet l'analyse et l'approfondissement des propriétés des figures symétriques (par la différenciation cognitive et la définition, même verbale). Elle permet aussi de comprendre la distinction entre figures directement et inversement égales et rend possible la présentation du concept de symétrie comme transformation géométrique du plan. En outre, elle permet l'étude de la composition des symétries et des propriétés associées.

La visualisation, quand elle s'effectue de façon correcte et valable, devient la base d'une pensée mathématique riche et articulée, qui ne reste cependant pas isolée du vécu et du travail d'ensemble de l'élève. Elle favorise en outre l'utilisation ordonnée, rationnelle et cohérente de concepts liés à celui de symétrie dans l'étude des arts, par exemple. Ces concepts servent de base à la découverte et à l'explication de

phénomènes physiques, chimiques et biologiques, mais fournissent aussi des interprétations appropriées en peinture, en architecture, en sculpture, en urbanisme, etc.

Conclusion

L'importance du processus de visualisation dans l'enseignement des mathématiques ne doit pas être sous-estimée, si l'on veut assurer une progression satisfaisante des connaissances et des aptitudes cognitives de l'élève. La visualisation est en effet le moyen fondamental par lequel se produit l'activité intellectuelle qui établit la liaison entre l'expérience immédiate et la mémoire permanente. Le rôle des images mentales est irremplaçable pour toute pensée vraiment féconde. De nombreux travaux de recherche psychologique, y compris les plus récents, confirment cette conclusion. Néanmoins, la représentation par un système de signes graphiques, cohérent et contigu à la pensée mathématique, constitue la base d'une analyse systématique, d'un contrôle rationnel, d'une définition et d'une utilisation plus précise des intuitions intérieures. Sans ce pont jeté entre le monde intérieur et le monde réel, l'activité mathématique, qui se caractérise avant tout par un mode de pensée analytique et logique, se heurte à de nombreuses difficultés.

Michael Mitchelmore

Aptitude spatiale et enseignement de la géométrie à la Jamaïque

Introduction

L'aptitude spatiale est l'aptitude à former et à manipuler les images mentales des objets physiques. Cette aptitude entre en jeu chaque fois que l'on fait de la géométrie, puisque la géométrie est l'étude des propriétés spatiales de diverses figures issues du monde concret des objets physiques. Cependant, dans l'enseignement secondaire et aux niveaux d'enseignement plus élevés, la géométrie comprend aussi une importante composante logique de sorte que les scores obtenus aux tests de connaissances de géométrie et aux tests d'aptitude spatiale ont tendance à n'être que modérément corrélés (Werdelin, 1961). Dans l'enseignement primaire, en revanche, les élèves en sont encore au stade de l'apprentissage des concepts visuels fondamentaux de la géométrie ; on s'attendrait donc à trouver à ce niveau une relation beaucoup plus étroite entre l'aptitude spatiale et les connaissances de géométrie.

Les connaissances des enfants en géométrie ont fait l'objet de très peu de recherches interculturelles. Nous examinerons dans ce chapitre certains résultats obtenus dans un pays en développement, la Jamaïque, de manière à nous faire une idée du type de difficultés spatiales que rencontrent les enfants dans l'apprentissage de la géométrie. La Jamaïque, bien que pays en développement, est relativement avancée sur le plan économique et possède une longue histoire de contacts avec la culture occidentale.

L'aptitude spatiale des enfants jamaïquains

J'ai effectué, il y a quelques années, une étude relative au dessin tridimensionnel et à la reproduction de configurations portant sur des échantillons d'élèves de niveau d'instruction et de milieu urbain comparables de la Jamaïque, de l'Ohio et d'Angleterre (Mitchelmore, 1980*a*). Les résultats de cette étude fournissent des indications très claires sur la position relative des enfants jamaïquains à cet égard.

L'étude a montré que la progression entre la première et la neuvième année d'études était la même pour les trois échantillons, mais que la performance des enfants jamaïquains était différente. C'est ainsi que 62 % des enfants jamaïquains de cinquième année d'études primaires (moyenne d'âge 11,5 ans) représentaient le cube de la façon la plus simple possible : par un carré tandis que 6 % seulement des dessins effectués par les élèves anglais au même niveau de scolarité et en moyenne plus jeunes de 1,1 ans étaient de ce style. J'ai fait passer récemment les mêmes tests à un échantillon d'élèves de cinquième année d'école primaire de la République fédérale d'Allemagne (moyenne d'âge : 11,7 ans) : le score qu'ils ont obtenu leur confère encore un an et demi d'avance sur les élèves anglais de classe 5. Ce résultat met en évidence l'écart entre les enfants jamaïquains et les enfants de ces pays industrialisés. Cependant, les variations d'ampleur inattendue constatées entre les trois pays industrialisés semblent aussi indiquer que les conséquences de cet écart ne sont peut-être pas aussi graves qu'on aurait pu le penser.

On peut attribuer les difficultés qu'éprouve l'enfant à dessiner des formes tridimensionnelles régulières au fait que sa notion de l'espace n'est pas liée à un modèle euclidien (deux directions horizontales perpendiculaires et une direction verticale) opérationnel. Ce problème apparaît clairement quand on demande aux jeunes enfants jamaïquains de compléter un dessin en traçant des poteaux télégraphiques verticaux le long d'une route (voir la figure 1). Lors d'une récente étude portant

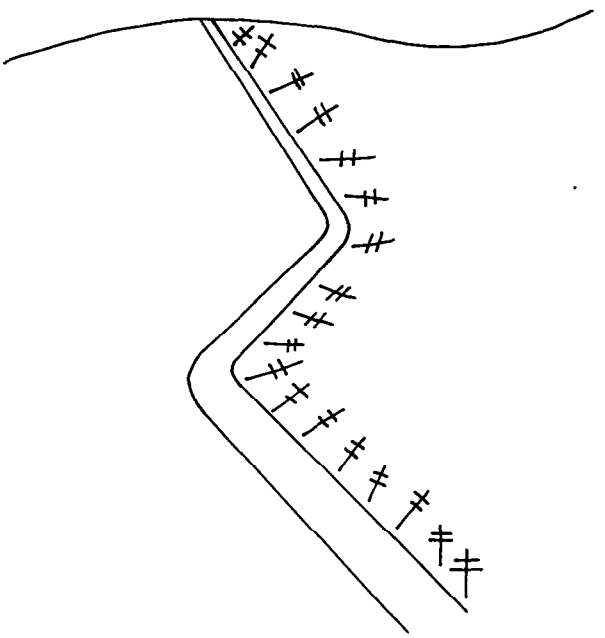


Fig. 1. Tâche des poteaux télégraphiques : complétement typique d'un enfant jamaïquain de 1ère année d'école primaire.

sur des écoliers de Kingston (Mitchelmore, 1980*b*), j'ai constaté que 12 % seulement des enfants de première année d'études primaires traçaient, dans la partie inférieure du dessin, des poteaux inclinés à moins de 10 % de la verticale. La proportion s'élevait à 50 % en cinquième année. Les erreurs étaient plus importantes dans la partie supérieure de dessin, et encore plus dans la partie centrale, sans doute parce que les enfants voulaient éviter d'empiéter sur l'horizon ou sur la route. Comme le montre la figure 1, ils ont tendance, dans l'ensemble de la figure, à tracer les poteaux perpendiculairement à la route. Ils éprouvent des difficultés semblables à figurer par un trait horizontal le niveau de l'eau contenue dans une bouteille inclinée ; dans 62 % des dessins effectués par les enfants de première année, la surface de l'eau était, à 10° près, perpendiculaire aux flancs de la bouteille. Les travaux d'Isaacs (1976) montrent que les enfants jamaïquains de sixième année d'études primaires rencontrent eux aussi de grandes difficultés dans cette tâche, de même que dans plusieurs autres tâches de conservation de Piaget.

Mon étude (Mitchelmore, 1980*b*) a aussi monté qu'il ne s'agissait pas simplement d'un problème de visualisation des trois dimensions ou de connaissances physiques sur les poteaux télégraphiques ou les niveaux d'eau. Les élèves commettaient des erreurs semblables lorsqu'on leur demandait de recopier la médiane courte d'un parallélogramme (segment joignant les milieux des côtés les plus longs), comme le montre la figure 2. Dans 79 % des tracés des enfants de première année, le segment était plus proche de la perpendiculaire que de la bonne direction. Cette proportion s'abaissant à 44 % en cinquième année, mais ce n'est qu'en neuvième année que la médiane était tracée plus ou moins parallèlement (à 10° près) aux côtés les plus courts, dans plus de 50 % des dessins. Les enfants recopiaient les figures plus simples avec un peu plus de précision.

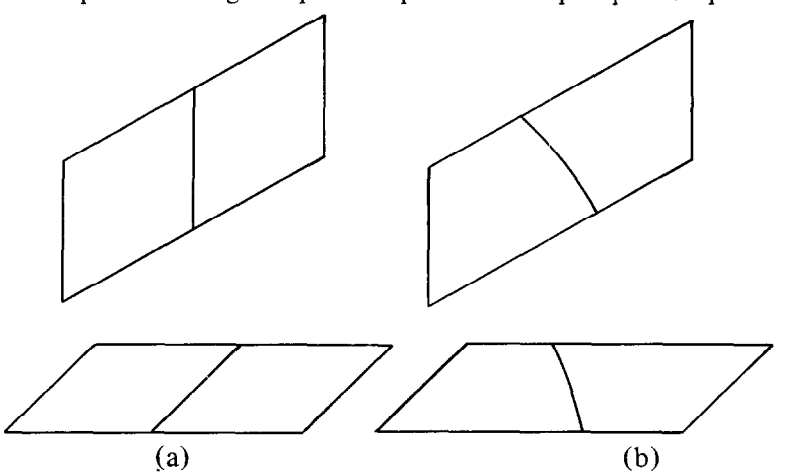


Fig. 2. (a) Parallélogrammes dont la médiane courte est à recopier sur les parallélo-

grammes congruents figurant en regard ; (b) Résultat typique de cette épreuve de copie de médianes chez un jeune enfant jamaïquain.

Les droites parallèles ou perpendiculaires à une droite donnée étaient recopiées avec une erreur inférieure à 5° dans 59 % des cas en première année, et dans 91 % des cas en cinquième année. Les angles étaient recopiés avec une erreur inférieure à 10° dans 40 % des cas en première année et dans 56 % des cas en cinquième année. Malheureusement, on ne dispose pas encore de données comparables sur l'exactitude de la copie en deux dimensions pour les écoliers d'autres pays.

On retire de ces résultats l'impression que, au cours de leur scolarité primaire, les enfants jamaïquains acquièrent progressivement la notion de direction, mais qu'elle reste assez générale et intuitive et conduit souvent à des dessins assez imprécis. Les droites sont tracées plus ou moins parallèlement à la direction indiquée, mais ou bien les enfants n'ont pas conscience de la direction précise (sauf dans les cas vraiment les plus simples) ou bien ils ne considèrent pas que la direction soit au nombre des critères importants d'une "copie exacte". La tâche de tracer la médiane d'un parallélogramme illustre très clairement les difficultés des enfants. Il semble que, pour la réussir, l'enfant doive avoir consicence que le segment de droite à reproduire est parallèle aux deux côtés courts, de façon à pouvoir résister à l'attirance naturelle de la perpendiculaire ; un vague sens de la direction ne suffit pas. Le lecteur peut en faire lui-même l'expérience en recopiant *rapidement* à main levée le parallélogramme du bas de la figure 2 (a) ; il est probable que la médiane s'écartera d'au moins 10° de la bonne direction. La différence entre les adultes et les enfants réside dans le fait que les adultes font en général beaucoup plus attention si on leur demande une copie exacte ; les enfants, apparemment, ne sont pas capables d'autant de soin. La médiocrité des dessins d'objets tridimensionnels réguliers semble en être une conséquence directe, car de tels dessins nécessitent un tracé assez soigneux de segments parallèles ou à peu près parallèles.

Des études récentes inédites, effectuées par des élèves-maîtres jamaïquains, font également apparaître un manque de précision en ce qui concerne la forme, la position et la taille. Deux études signalent, en troisième et neuvième années, des difficultés à compléter les tracés de configurations. La figure 3 en est une illustration typique ; il semble que l'enfant ait commencé correctement, puis se soit impatienté et ait terminé son tracé par un ensemble arbitraire de lignes obliques. Un

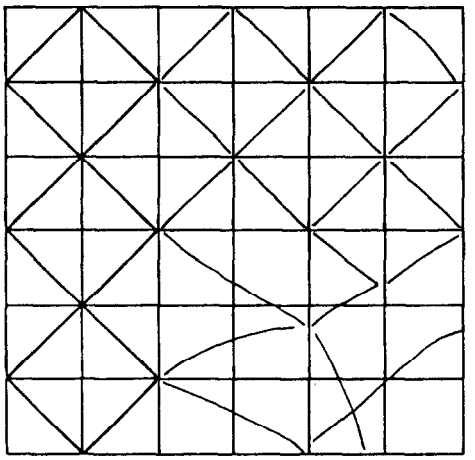


Fig. 3. Tentative de complétement de la configuration des deux premières colonnes par un enfant jamaïquain en troisième année d'école primaire.

phénomène semblable se produit quand on demande aux élèves de sixième année de coller des carrés de 2 cm de côté sur du papier à carreaux de 1 cm, pour faire une mosaïque. Beaucoup d'enfants collent correctement le premier rang, ou les deux premiers mais ensuite les carrés commencent à tourner légèrement et se chevauchent jusqu'à donner l'aspect d'écailles de poisson. Ces exemples indiquent que les enfants possèdent bien les concepts géométriques nécessaires, mais qu'ils sont incapables de les appliquer avec persévérance face à l'effort répétitif exigé par la tâche. (La plupart des enquêteurs rapportent que les écoliers du primaire aiment beaucoup ces activités pratiques de construction de configurations ; il ne semble donc pas qu'il s'agisse simplement, de la part des enfants, d'un relâchement de l'intérêt.

Causes et conséquences

Etant donné les différences de milieu physique, il est raisonnable de penser que certains des enfants jamaïquains de l'échantillon ne vivaient pas, chez eux, dans le même environnement que les enfants européens.

A la Jamaïque, beaucoup de familles ne possèdent pas d'équipement spécialement destiné aux jeux des enfants. Ceux-ci ont moins de jouets. Leurs livres sont moins raffinés et les émissions de télévision pour enfants sont moins variées. En outre, ces activités sont souvent considérées comme une perte de temps et on oriente plutôt les enfants vers les tâches ménagères et autres tâches qu'ils sont censés accomplir. L'effet de ce genre d'environnement familial est mis en lumière de façon frappante par les cas exceptionnels observés, de temps en temps, comme le cas de l'élève de quatrième année d'études primaires dont le père était mécanicien et avait un atelier à la maison, ou celui de l'élève de sixième année qui aidait souvent son père maçon ; ces deux garçons ont obtenu, dans des classes rurales constituées en majorité d'agriculteurs, d'excellents résultats dans les tâches faisant intervenir la notion de symétrie.

L'effet d'un environnement appauvri apparaît souvent de façon plus directe. Les élèves peuvent avoir du mal à effectuer des tâches aussi simples que de se servir d'une règle pour tracer une droite passant par deux points. On a déjà cité la difficulté qu'ont les enfants à compléter des configurations ; il arrive aussi qu'ils ne réussissent pas à les colorier en formant des motifs réguliers (cela peut aussi constituer un autre signe du manque de précision mentionnée plus haut).

Ces enfants sont encore désavantagés par le fait qu'on enseigne très peu de géométrie dans les écoles primaires de la Jamaïque. Ce n'est pas surprenant : la géométrie ne figure au programme des Ecoles normales que depuis dix ans. La majorité des maîtres voient donc sans doute dans la géométrie une matière du secondaire qui leur a donné bien du mal, à cause du mode d'enseignement de l'époque axé sur la démonstration rigoureuse (de faits le plus souvent évidents pour l'élève) ainsi que sur l'étude des propriétés des figures et sur des constructions exactes. La conception actuelle de la géométrie et de la façon dont il convient de l'enseigner est tout à fait étrangère à ces maîtres et on ne peut qu'éprouver de la compassion pour les cinq enseignants sur dix qui reconnaissent qu'ils auraient besoin d'aide pour pouvoir instruire les enfants avec assurance.

Les conséquences qui en découlent pour l'enseignement de la géométrie à l'école secondaire sont prévisibles, et l'observation, ainsi que les rapports des élèves-maîtres, le confirment : il faut passer tellement de temps à enseigner les concepts élémentaires que l'on n'avance que lentement. Les programmes de géométrie étant semblables à ceux des écoles de type comparable du Royaume-Uni, tout essai de "terminer le programme" semble voué à l'échec. Les résultats des élèves aux épreuves de géométrie des examens publics sont toujours décevants, mais cela pourrait être dû au fait que la barre est fixée trop haut. Pour le savoir, j'ai fait passer récemment la même épreuve de géométrie élémentaire (portant sur le nom des figures planes et tridimensionnelles élémentaires, sur certaines de leurs propriétés les plus simples, et sur

les concepts fondamentaux relatifs à la direction, y compris les angles) à des élèves représentatifs de neuvième année d'études, à la Jamaïque et en République fédérale d'Allemagne. Dans ce dernier pays, la note moyenne des élèves qui devaient quitter l'école à la fin de leur dixième année de scolarité était de 74/100 ; ceux qui poursuivraient probablement leurs études au-delà de la dixième année avaient une moyenne de 85/100. La note moyenne des lycéens jamaïquains (qui provenaient du quintile supérieur dans le classement par aptitude et de la moitié la plus favorisée sur le plan socio-économique, et dont certains venaient d'écoles préparatoires privées et non d'écoles primaires publiques) était de 83/100. Cela donne à penser que ces élèves avaient surmonté tous les handicaps dont ils avaient pu souffrir au début de leur scolarité secondaire. Cependant, la note moyenne des élèves jamaïquains de neuvième année fréquentant des écoles secondaires qui n'imposaient pas de sélection, était beaucoup plus basse : seulement 50/100. Les moyennes pondérées donnent des estimations globales de 57/100 à la Jamaïque et de 79/100 en République fédérale d'Allemagne. La note moyenne pour la Jamaïque est inférieure à la moyenne de 62/100 obtenue par les élèves de cinquième année ayant passé l'épreuve en République fédérale d'Allemagne. En fait, on estime que l'élève jamaïquain moyen de neuvième année ne connaît guère plus de géométrie élémentaire que l'élève moyen de quatrième année en République fédérale d'Allemagne. Le fait que cet écart ne soit pas aussi important que la différence d'aptitude spatiale est peut-être dû au fort contenu verbal de l'épreuve de géométrie. Bien que l'anglais soit une deuxième langue pour celui qui parle le créole, il semble que les Jamaïquains obtiennent de bien meilleurs résultats dans les matières littéraires qu'en mathématiques et en sciences.

Une étude en coopération sur l'enseignement de la géométrie

On pourrait penser que les enfants jamaïquains sont comparativement si désavantagés sur le plan de l'aptitude spatiale qu'on ne devrait pas leur enseigner la géométrie, ou, tout au moins, qu'on ne devrait l'enseigner qu'aux élèves les plus âgés. On pourrait dire aussi que, quelle que soit l'importance des aptitudes géométrico-spatio-mécaniques pour le développement technologique, il n'est peut-être pas impossible d'enseigner la géométrie à des écoliers du primaire. C'est afin de préciser l'influence de la situation pédagogique sur l'apprentissage de la géométrie dans les écoles primaires de la Jamaïque, que j'ai constitué récemment

un groupe de vingt instituteurs stagiaires pour enseigner divers sujets de géométrie à des classes allant de la deuxième à la dixième année de scolarité et évaluer les réactions des élèves à l'expérience, en particulier leur apprentissage des notions présentées. Ces études ne satisfont pas toujours aux critères rigoureux d'objectivité de la recherche mais, dans l'ensemble, elles démontrent de façon concluante que les enfants jamaïquains peuvent apprendre les notions géométriques si on les leur présente de façon convenable.

Douze de ces études ont été réalisées au niveau de l'enseignement primaire. Un des stagiaires a appris à une classe de deuxième année à reconnaître le cercle, le triangle, le carré et le rectangle et à identifier des propriétés simples de ces figures comme le nombre de côtés et leur rectitude. Un autre stagiaire a appris à une classe de troisième année à reconnaître le cube, les cuboïdes, le cylindre et le cône et à identifier la forme de leurs faces. Quatre stagiaires ont enseigné les notions de droites parallèles et perpendiculaires à des classes allant de la quatrième à la sixième année, et ont appliqué ces notions à l'analyse du carré et du rectangle. Deux stagiaires ont traité les configurations périodiques en classes 3 et 6 (troisième et sixième années), mettant en évidence les noms et les propriétés fondamentales de diverses figures planes. Trois étudiants ont enseigné les notions relatives à la symétrie-miroir dans les classes 4, 5 et 6, (quatrième, cinquième et sixième) renforçant la connaissance des figures fondamentales en même temps qu'ils enseignaient les concepts de distance et de direction. Un des stagiaires a enseigné les angles à une classe de sixième année en employant la notion de rotation.

On a adopté dans toutes ces études une approche très pratique. On demandait aux élèves de rechercher des exemples des notions traitées, aussi bien dans la classe qu'à l'extérieur au cours de sorties pour l'étude de la nature, et d'apporter des spécimens pris chez eux ou découpés dans des magazines. Ils classaient des formes en carton, aboutaient des bandes de carton, pliaient et déchiraient du papier, composaient des figures avec des élastiques sur des géoplans, construisaient des modèles en carton et traçaient des courbes sans fin. On n'utilisait plas d'instruments complexes. Quand il fallait un instrument, les enfants le fabriquaient eux-mêmes avec une feuille de carton, de la ficelle ou du papier-calque. Plusieurs stagiaires ont intégré leur enseignement de la géométrie aux activités manuelles et artistiques de telle sorte que les élèves aient un contact pratique supplémentaire avec les matières et les formes. Dans la plupart des classes, les enfants travaillaient par petits groupes à des activités de recherche ou de création, et tous les travaux réalisés en commun ou individuellement étaient ensuite exposés. Tous les stagiaires rapportèrent que les élèves s'absorbaient profondément dans leur travail et voulaient souvent continuer après la fin de la leçon ou du cours. Plusieurs remarquèrent que les élèves participaient et

coopéraient davantage (en particulier ceux considérés auparavant comme faibles) et que les comportements perturbateurs diminuaient ; Quelques-uns notèrent qu'il était beaucoup plus facile, en géométrie qu'en arithmétique, de placer les enfants dans des situations de découverte mathématique.

Les notes obtenues lors des tests augmentèrent de façon saisissante, passant typiquement d'à peu près 20/100 à 80/100 environ, à la suite d'une unité de douze leçons de trente minutes s'étalant sur une période de quatre semaines. Ces progrès sont très supérieurs à ceux qui ont été obtenus aux cours d'études pédagogiques semblables dans les écoles secondaires. Cela donne à penser qu'en fait la géométrie est peut-être plus facile à apprendre au niveau du primaire qu'à celui du secondaire. D'après des rapports anecdotiques sur les résultats des prétests, il semblerait que les jeunes enfants aient tout à fait conscience du fait que leur environnement est rempli de différentes formes et configurations, mais que la plupart d'entre eux n'ont jamais eu l'occasion d'y mener des investigations structurées ou d'apprendre le vocabulaire approprié.

Incidemment, cette étude en coopération a aussi montré que les Ecoles normales, à la Jamaïque, sont en mesure de former des instituteurs qui maîtrisent les concepts géométriques élémentaires, qui aiment enseigner ce sujet et qui font preuve, dans cet enseignement, d'une grande créativité.

Conséquences pour l'enseignement primaire

On a montré que les jeunes enfants jamaïquains saisissent facilement les concepts géométriques si on les présente de façon non conventionnelle. Cela implique qu'on accorde, dans le primaire, plus de place à la géométrie qu'elle n'en a actuellement et qu'on se préoccupe de la compétence des maîtres. Non seulement, grâce à des bases plus solides, les acquisitions ultérieures en géométrie s'amélioreront, mais on peut aussi espérer parvenir à des progrès sur le plan de l'aptitude spatiale, deux facteurs qui sont de nature à faciliter le développement industriel. On pourrait même soutenir que, pour rattraper l'énorme retard accumulé, il faudrait donner à la géométrie élémentaire plus de place que dans les pays développés. Une seule unité d'enseignement par an est certainement insuffisante. On peut aussi employer avec profit la géométrie pour enseigner certains compétences utiles sur le plan social.

Bien que la déduction logique ait toujours sa place chez l'enfant plus âgé, la géométrie enseignée aux plus jeunes doit être de nature

pratique et exploratoire. Cette initiation n'exige guère d'instruments géométriques conventionnels (ils peuvent même constituer une gêne), mais il faut suffisamment de papier, de carton, de ficelle, de ciseaux, etc. On peut souvent se contenter de matériaux de récupération. Le "cours magistral" avec explications au tableau noir, n'y a certainement pas sa place.

Faire la preuve que les enfants peuvent apprendre une question de géométrie est une chose, montrer comment entretenir l'apprentissage tout au long des six années environ que dure la scolarité primaire en est une autre. Les manuels importés des pays développés ne sont guère susceptibles de guider le maître, car ils supposent un niveau de développement spatial et un acquis qui dépassent de plusieurs années le niveau réel des élèves.

Ce qu'il faut, c'est un agencement des activités qui puisse mener les enfants du stade où ils sont capables d'identifier globalement la forme des figures planes et tridimensionnelles fondamentales à celui où ils connaissent leurs propriétés les plus importantes et les concepts qui leur sont associés, en renforçant leurs connaissances aux diverses étapes grâce à des activités visuelles créatives et en conduisant à un bon degré d'exactitude dans les représentations géométriques. Sans organisation créative (ce qui implique aussi l'emploi de tests), même la géométrie pratique peut se réduire à une activité sans objet, répétitive et, par conséquent, ennuyeuse et vaine.

Il reste à déterminer l'accueil que les enseignants actuels de l'école primaire réserveraient à un programme de géométrie pratique. Un recyclage important serait certainement nécessaire. On peut être beaucoup plus optimiste en ce qui concerne les nouveaux maîtres. Si les responsables de la formation des maîtres peuvent amener leurs étudiants à analyser géométriquement leur environnement et à s'instruire de la même manière amusante et concrète dont ils devront, selon nous, instruire leurs élèves, s'ils résistent surtout à la tentation d'enseigner à leurs étudiants à démontrer des théorèmes et à effectuer des constructions, l'apprentissage scolaire des concepts géométriques fondamentaux s'en trouvera favorisé.

Références

ISSACS, P. A. 1976. *Some Conservation Concepts in Jamaïcan Grade 6 Students.* Kingston (Jamaïque), University of the West Indies. (thèse de maîtrise, inédite).

MITCHELMORE, M. C. 1977. *Geometrical Knowledge and Intuition in Prospective Primary School Teachers.* Kingston (Jamaïque), University of the West Indies School of Education (article inédit).

. 1980*a*. Three-Dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 11, No. 2, pp. 205–216.

. 1980*b*. Children's Drawings of Parallels and Perpendiculars (Communication présentée au 4ème Congrès international sur l'enseignement mathématique, Berkeley, Calif., août 1980).

WERDELIN, I. 1961. *Geometrical Ability and the Space Factors in Boys and Girls.* Lund (Suède), Gleerup.

Randall J. Souviney

L'élaboration et la résolution des "problèmes-récits"

Dans son chapitre sur les difficultés conceptuelles associées à l'apprentissage des mathématiques (p. 113) Ken Clements soulève l'importante question relative au type de comportement dénotant le maîtrise d'un concept. Selon lui, on ne peut considérer que des enfants ont maîtrisé un concept que lorsqu'ils savent identifier des exemples de ce concept dans le cadre de problèmes à résoudre. En fait, il affirme qu'il ne suffit pas de vérifier que les faits numériques et les algorithmes élémentaires sont connus, l'important étant que les élèves soient capables d'identifier dans un problème la ou les opérations qui permettront de la résoudre.

Ce critère d'évaluation semble offrir une illustration pratique du dilemme "compétence performance" devant lequel se trouvent les personnes qui s'occupent de pédagogie. La faiblesse de la performance d'un enfant correspond-elle chez lui à un manque de compétence ? Cette façon d'aborder la définition de la maîtrise du concept, bien qu'un peu plus stricte que celle qui prévaut dans la pratique courante, pourrait inciter les maîtres et les chercheurs à s'intéresser davantage à l'application des techniques de calcul et de mesure à des problèmes appropriés du milieu. Dans le présent article, nous étudions quelques stratégies pratiques susceptibles d'être employées avec profit pour aider les enfants à acquérir une certaine aisance dans la résolution du type de problèmes présentés couramment dans les manuels sous forme d'énoncés verbaux, ou "problèmes-récits".

Deux types de problèmes

On peut classer les problèmes en deux catégories générales : les "problèmes-récits" et les "problèmes-processus" (Charles, 1981). Les problèmes-récits sont généralement présentés de manière convergente. Ils exigent de l'élève qu'il lise et comprenne l'énoncé écrit du problème et qu'il détermine la ou les opérations à appliquer, pour le résoudre, aux valeurs données dans l'énoncé du problème. Bien que cette conception de la résolution de problèmes soit quelque peu restrictive, elle est très répandue dans les écoles et dans les manuels, et elle peut favoriser

l'acquistion des aptitudes linguistiques nécessaires.

Dans la réalité, cependant, la plupart des problèmes peuvent difficilement être isolés de leur contexte. Le contexte où se posent la plupart des problèmes du monde réel (c'est-à-dire ceux qu'on rencontre en dehors de la classe) offre en général une masse d'informations et de variables qui sont étrangères à la solution du problème considéré. Un travail considérable de filtrage est parfois nécessaire – pour séparer l'information utile de l'information inutile – avant de pouvoir comprendre clairement le problème lui-même. Pour déterminer comment il convient d'aborder ce type de problèmes, on procédera d'abord, s'il y a lieu, par essais et erreurs. Des stratégies générales comme le comptage, le recours à un croquis, l'estimation, la mesure ou la recherche d'avis autorisés sont souvent utiles pour résoudre ces problèmes du monde réel.

Charles désigne ces problèmes divergents sous le nom de "problèmes-processus", car ils ne sont pas justiciables d'un algorithme unique et évident et il peut exister plusieurs réponses correctes. Savoir résoudre facilement des problèmes de ce type permet souvent de s'attaquer ensuite avec succès à toute une catégorie de problèmes semblables. De telles aptitudes sont très recherchées dans toute société technologique. Une étude plus poussée des stratégies de "processus" sortirait du cadre du présent article. Nous nous concentrerons donc, dans la suite de cet article, sur la première catégorie de problèmes : les problèmes-récits. Pour plus de détails sur les "problèmes-processus", voir Souviney (1981) et Charles et Lester (1982).

Développement du langage et problèmes-récits

La capacité de résoudre correctement les problèmes-récits dépend, dans une grande mesure, du niveau de compréhension de la langue qu'a l'enfant. Les résultats d'une étude récente effectuée en Papouasie-Nouvelle-Guinée (Souviney, 1980) ont montré que chez les enfants qui réussissaient en mathématiques, le recours à la mémoire visuelle diminuait entre la deuxième année et la sixième année d'école primaire et que, parallèlement, la relation entre la connaissance de l'anglais (langue d'enseignement) et la réussite en mathématiques augmentait.

Jones (1981) a comparé le rythme d'apprentissage de l'anglais chez les enfants dont l'anglais est la première langue et ceux dont c'est la deuxième langue. En employant un modèle de traitement de l'information, il montre de façon convaincante que la mémoire à court terme nécessaire pour traiter les phrases-clés de problèmes-récits dépasse la capacité de beaucoup d'élèves du primaire, plus particulièrement de ceux qui apprennent dans une deuxième langue. Il donne l'exemple du problème suivant : "Le nombre 8 vaut 2 de plus que quel nombre ½ ?" Il constate que l'enfant qui ne peut conserver en mémoire que le mot

"plus", pendant qu'il opère sur les deux nombres 8 et 2, répondra probablement 8, car " 8 vaut plus que 2". Celui qui peut retenir deux mots répondra sans doute 10, car "2 [de] plus" signifie "ajouter 2". Un enfant doit être capable de retenir les trois mots "vaut . . . [de] plus que" pour pouvoir donner la réponse correcte : 6.

Les résultats d'une étude de Reed (1981) sur les étudiants de mathématiques du supérieur confirment l'existence d'une relation entre la compréhension de la langue et l'acquisition des aptitudes mathématiques au niveau élémentaire (et au début du secondaire). Il définit trois catégories d'acquisitions linguistiques : la compréhension de la langue, la formation des concepts et le symbolisme mathématique. D'après lui, l'importance de la compréhension va croissant au cours des premiers stades de l'acquisition des connaissances mathématiques. Cette dépendance vis-à-vis de la compréhension de l'anglais, en l'occurence, diminue dans les grandes classes du secondaire et dans l'enseignement supérieur, et cède la place aux exigences plus rigoureuses de la langue concise des symboles mathématiques.

Conséquences pour l'enseignement

Si l'on admet que la compréhension de la langue d'enseignement est essentielle pour l'apprentissage au niveau élémentaire, l'enseignant de mathématiques a alors le choix entre deux possibilités : (a) Attendre que la compétence linguistique soit suffisante pour servir de soutien à l'instruction mathématique ; (b) Essayer d'aider les élèves à améliorer leur compétence linguistique au cours de la leçon de mathématiques.

La première solution peut convenir dans le cas de jeunes élèves dont la langue d'enseignement est la première langue et dont on peut espérer qu'ils acquerront les capacités linguistiques nécessaires en temps utile. Pour les élèves qui apprennent dans une deuxième langue, choisir cette solution risque d'entraîner un retard impossible à rattraper.

La seconde solution est tirée de Vygotski (1962) et Feuerstein (1979). On part de l'hypothèse que l'aide d'une personne qualifiée peut élargir considérablement l'éventail des tâches qu'un novice est capable de réaliser avec succès. Le principe opératoire qui en découle consiste à apporter un soutien extérieur aux élèves pour les aider à accomplir une tâche ou à résoudre un problème. On leur retire ensuite progressivement ce soutien, au fur et à mesure que chacun acquiert les capacités requises. Ce processus offre de nombreuses occasions de réussite à chaque étape. Il permet au maître d'insister sur certains éléments de la tâche à accomplir et il est assorti de stratégies d'enseignement correctif pour le cas où le soutien aurait été retiré trop rapidement.

Soutien dynamique pour la résolution des problèmes-récits

L'exemple de la séquence, ci-dessous, montre en quoi peut consister un ensemble de structures de soutien dynamiques, permettant au maître de faire varier la mémoire à court terme, le niveau de compréhension du langage écrit, le contenu numérique et la complexité du problème.

Séquence progressive

La façon dont un problème-récit est présenté peut avoir une influence significative sur la capacité de l'élève à le résoudre. Considérons les catégories suivantes de modes de présentation d'un problème :

1. Un problème-récit sans nombres, présenté oralement, graphiquement ou à l'aide de symboles ;
2. Une expression numérique utilisée comme "manchette" d'un récit ;
3. L'ecriture d'une expression numérique non résolue comme "manchette" d'un problème-récit donné ;
4. L'ecriture d'une expression numérique, et le calcul de sa solution pour un problème-récit donné.

Pour chacune de ces catégories, plusieurs niveaux de soutien extérieur sont possibles. On citera à cet égard quelques exemples instructifs.

Problèmes sans nombres

Essayer de présenter les problèmes oralement, en utilisant des figures, ou en plaçant réellement les enfants dans la situation concrète correspondant au problème. Les enfants sont souvent capables d'enregistrer et de traiter un plus grand nombre d'éléments-clés d'un problème quand on le présente de manière orale, graphique ou kinesthésique, que quand son énoncé se présente sous forme imprimée. C'est particulièrement vrai pour les jeunes enfants dont la langue d'enseignement n'est pas la langue maternelle. Par exemple, les enfants peuvent se constituer un modèle des premiers concepts du calcul en "ajoutant" ou "soustrayant" un certain nombre d'élèves à des groupes de tailles diverses. Ces "problèmes de personnes" permettent de faire concrètement le lien entre des instructions données oralement et les opérations mathématiques.

Au début, les enfants doivent seulement identifier l'opération que le récit implique. Cela revient à leur demander ce que le problème leur dit de faire pour trouver la réponse.

Exemple 1. Venna et Hai ont acheté des fruits au magasin. Que doivent-ils faire pour trouver combien d'argent ils ont dépensé ?
Réponse : Additionner.
Exemple 2. Dogana a un parc de camions. Chaque camion a le même nombre de pneus. Que peut-il faire pour trouver rapidement combien de pneus il a en tout ?
Réponse : Additionner, ou compter et multipler.

Par la suite, on peut présenter des problèmes semblables sous forme écrite. Les élèves doivent alors identifier l'opération qui convient et souligner le (ou les) mot(s) ou expression(s) qui détermine(nt) cette opération.

Exemple 3. Anna doit acheter de la ficelle pour faire un filet à provisions. Elle connaît le *nombre de mètres* de ficelle d'*une pelote* et le prix de la pelote *entière.* Comment peut-elle trouver le *prix* d'*un mètre* ? (Le choix des mots-clés peut varier).

Réponse : En faisant une division.

Elaboration d'un récit à partir de sa manchette

Dire aux élèves qu'ils ont à écrire un article de journal à partir d'une "manchette" que vous composez. Ecrire la "manchette" au tableau sous la forme d'une expression numérique et demander aux élèves d'inventer un problème-récit correspondant. Les enfants peuvent également raconter le récit à l'aide de dessins.

Exemple 4. Manchette : $3 \times 4 = 12$.

Récit : Un canoë peut contenir 3 personnes. Nous avons 4 canoës. Ils peuvent transporter jusqu'à 12 personnes.

Les manchettes peuvent également se présenter sous la forme d'un récit contenant des expressions numériques non résolues. D'autres enfants résoudront le problème énoncé dans ce récit.

Exemple 5. Nous avons pris 5 poissons, puis nous en avons pris 4 de plus. 3 poissons sont retombés à l'eau. Combien de poissons avons-nous eu à manger ?

Réponse : 6.

Ecriture de la manchette d'une problème-récit

Donner un problèmerécit sous forme écrite, la réponse étant contenue dans l'énoncé, et demander aux élèves d'écrire la "manchette" sous la forme d'une expression numérique. Une autre façon d'"écrire" cette expression numérique consiste à faire un dessin de la solution.

Exemple 6. Un camion peut transporter un chargement de 750 kilogrammes. Un sac de café pèse 50 kilogrammes. Le camion peut transporter 15 sacs de café.

Manchette : $750 \div 50 = 15$.

Donner ensuite un problème avec des blancs à la place des nombres. Les élèves doivent remplir les blancs et écrire la manchette.

Exemple 7. Robert a acheté régimes de bananes. Il y avait bananes dans chaque régime. Il y avait en tout bananes.

Manchette : $14 \times 10 = 140$ (pour 14 régimes de 10 bananes).

Problèmes-récits

On peut donner des problèmes-récits dans lesquels les enfants doivent identifier la (ou les) opération(s) appropriée(s), écrire une expression numérique non résolue et calculer sa solution. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire que les élèves écrivent leur solution sous forme horizontale. Les algorithmes verticaux et le calcul mental doivent être encouragés. Là encore, commencer avec des blancs à la place des nombres, mais terminer le récit par une question.

Exemple 8. L'école a ballons. Il y a enfants dans l'école. Si l'on opère un partage équitable, combien y aura-t-il d'enfants pour un ballon ?

Réponse : Pour une école de 216 enfants devant se partager 11 ballons, par exemple, les enfants écriront : $216 \div 11 = 19$, reste 7, soit environ 20 enfants.

A ce stade, les enfants devraient être prêts à aborder les problèmes-récits dont l'énoncé est imprimé dans les manuels ou écrits au tableau et fournit toute l'information nécessaire. Veiller à commencer par des problèmes dont la résolution ne nécessite qu'une seule opération, puis augmenter progressivement la difficulté jusqu'à des problèmes exigeant deux on trois opérations.

Exemple 9. (Problème en deux temps) Eddy a 30 centimes, Anna a 35 centimes et Richard a 25 centimes. Ils veulent acheter une boîte de couleurs qui coûte 99 centimes. Ont-ils assez d'argent.

Solution : (a) $30 + 35 + 25 = 90$
(b) $90 < 99$. Ils n'ont donc pas assez d'argent.

Finalement, ajouter au récit des informations qui ne sont pas nécessaires à la solution. Cela exerce les enfants à déterminer dans les problèmes qu'ils rencontrent les données utiles et celles qui ne le sont pas. Les enfants doivent faire une croix (X) sur les nombres inutiles. Si l'énoncé figure dans un manuel, ils peuvent placer un petit repère sur l'information inutile.

Exemple 10. Alvin a mis 5 heures à peindre 45 piquets de palissade. Ella a peint 50 piquets en 4 heures. Combien de piquets ont-ils peints à eux deux ?

Réponse : $45 + 50 = 95$ (les heures de travail constituent une information inutile).

Résumé et conclusion

On a vu que, pour la résolution des problèmes-récits, une bonne compréhension de la langue d'enseignement contribue de façon significative à la réussite. En apportant à l'élève novice un soutien extérieur bien

choisi, on l'aidera à trouver la solution. En retirant ensuite méthodiquement à l'élève ce soutien extérieur, on l'amène progressivement à avoir de moins en moins besoin d'assistance pour résoudre des problèmes de type semblable.

La séquence de techniques décrite ci-dessus pour la présentation de problèmes-récits n'est pas unique. Des variables autres que celles qui figurent dans les dix exemples donnés peuvent aussi se prêter à un soutien "dynamique". Par exemple, on peut exploiter les ressources sociales pour favoriser la persévérance, l'assurance et le brassage d'idées. On créera, par exemple, en classe un contexte permettant la résolution de problèmes par groupes de deux à quatre enfants. L'utilisation d'une calculatrice ou d'une table à double entrée pourra être autorisée. Cela permettra aux élèves qui ont du mal à mémoriser les relations numériques de base ou qui calculent lentement de participer avec succès aux activités de résolution de problèmes.

On devrait aussi prévoir des activités de résolution de problèmes faisant intervenir l'argent, la mesure, la géométrie et des sujets tirés des matières littéraires et des sciences sociales. Les problèmes liés aux activités réelles de l'école, comme les fêtes de classe ainsi qu'aux cérémonies locales offrent des occasions très stimulantes pour la résolution de problèmes. Ces événements constituent pour les enfants une riche source d'expérience, qui les mettra au contact des problèmes très divers qu'ils sont appelés à rencontrer dans la réalité de leur vie extrascolaire.

Références

CHARLES, Randall I. 1981. Get the Most out of "Word Problems". *Arithmetic Teacher,* Vol. 29, No. 3, pp. 39–40.

CHARLES, Randall I. ; LESTER, F. 1982. *Problem Solving : What, Why and How.* Palo Alto, Calif., Dale Seymour Pub.

FEUERSTEIN, R. 1979. *The Dynamic Assessment of Retarded Performers ; The Learning Potential, Assessment Device, Theory, Instruments and Techniques.* Baltimore Md., University Park Press.

JONES, P. 1981. Solving Word Problems in a Second Language and Reading Proficiency. Dans : P. Clarkson (dir. pub.), *Research in Mathematics Education in Papua New Guinea, 1981.* Lae, Papua New Guinea University of Technology.

REED, M. 1981. Language and Mathematics at the Tertiary Level. Dans : P. Clarkson (dir. pub.), *Research in Mathematics Education in Papua New Guinea, 1981.* Lae, Papua New Guinea University of Technology.

SOUVINEY, Randall J. 1980. *Teaching and Learning Mathematics in the Community Schools of Papua New Guinea.* Lae, Papua New Guinea Department of Education. (Indigenous Mathematics Project, document de travail, No. 20).

. 1981. *Solving Problems Kids Care About.* Santa Monica, Calif., Scott, Foresman & Co.

VYGOTSKY, L. S. 1962. *Thought and Language.* préparé et traduit par E. Hanfmann et G. Vakar. Cambridge, Mass., MIT Press ; New York, John Wiley.

Peggy A. House et Thomas R. Post

Eléments pour l'élaboration des programmes d'évaluation de la formation des enseignants

Introduction : La situation actuelle

A la suite de travaux récents sur l'enseignement des mathématiques, les spécialistes ont recommandé des réformes portant sur divers aspects de cet enseignement (National Council of Teachers of Mathematics, 1980 ; Mathematical Association of America, 1978). Face à cette exigence de réforme, il convient de se demander quelle est la situation actuelle. On trouvera dans une grande mesure la réponse à cette question dans trois études effectuées à la demande de la National Science Foundation (NSF) (Stake et Easley, 1978 ; Snydam et Osborne, 1977 ; Weiss, 1978), dont il ressort que les réformes des programmes scolaires et de la méthodologie des années 60 et du début des années 70 n'ont pas atteint leurs objectifs et que l'enseignement des mathématiques a très peu évolué de 1955 à 1975. D'après Gibney (1980), les principales constatations qui se dégagent de ces trois études sont les suivantes :

Un manuel unique constitue la source principale de contenu de l'enseignement, rares sont les autres matériels pédagogiques demandés ou employés.

Dans presque toutes les classes, la séquence des activités consiste à faire le corrigé des devoirs, à présenter un choix d'exemples et (ou) un nouvel exposé théorique à l'ensemble de la classe, puis à donner de nouveaux devoirs.

On observe peu d'enseignement heuristique.

Des activités non pédagogiques occupent une part appréciable du temps d'enseignement des maîtres.

Les tests standardisés sont d'un emploi très répandu. On observe une diminution des tests normatifs au profit des tests critériels.

Les résultats sont "meilleurs" à l'école élémentaire, où l'on consacre proportionnellement plus de temps aux activités de développement.

L'articulation verticale du contenu mathématique d'une classe à l'autre fait généralement défaut.

Le personnel disponible pour aider les maîtres dans leur pratique pédagogique et assurer le contrôle de qualité n'est pas suffisamment

nombreux.

Beaucoup d'enseignants réclament qu'on les aide à obtenir des informations sur les nouveaux matériels et les nouvelles méthodes pédagogiques, y compris le mode d'emploi des appareils. Les maîtres considèrent leurs collègues des autres classes comme la meilleure source d'idées. La formation continue locale apparaît plus utile aux enseignants du primaire qu'à ceux du secondaire.

En récapitulant ces constatations ainsi que d'autres énoncées dans les trois études de la NSF, Fey (1980) arrive à la conclusion que l'aspect le plus décourageant de ces études est qu'elles font apparaître, de façon constante, un écart important entre la réalité de l'enseignement des mathématiques telle qu'elle peut être observée dans la plupart des écoles, et les recommandations ou pratiques de beaucoup d'enseignants, inspecteurs et associations professionnelles en renom.

Préciser le but visé : des enseignants efficaces

La déception que dénote l'observation de Fey est partagée par beaucoup de professionnels de l'enseignement des mathématiques. Si cet écart entre les pratiques pédagogiques réelles et souhaitées existe bien, il ne faut plus se contenter de préparer les maîtres à l'exercice de leur métier, mais aussi adapter la formation qui leur est donnée de manière à réduire l'écart constaté. Et puisque l'efficacité pédagogique globale constitue depuis longtemps un des critères principaux pour évaluer l'activité d'enseignement, il est raisonnable de commencer par essayer de déterminer ce qui caractérise un enseignant efficace.

Recherches sur l'efficacité des enseignants

Les recherches sur l'efficacité des enseignants n'ont toujours pas fourni un ensemble de variables permettant de prédire avec un degré de certitude raisonnable les "chances" de réussite d'un enseignant donné.

Des études ont déterminé les caractéristiques qui permettent de distinguer les enseignants expérimentés des enseignants inexpérimentés. Ryans (1960) mentionne à cet égard trois éléments, que l'on retrouve dans des études ultérieures d'autres chercheurs : la cordialité, l'enthousiasme et un comportement méthodique. Barr (1961), qui a rendu compte d'une grande partie des recherches sur la formation des enseignants effectuées depuis 1920, fait remarquer que les premières tentatives visant à identifier et mesurer l'efficacité des enseignants reposaient souvent sur une des trois catégories d'informations suivantes : (a) appréciations des administrateurs, des pairs et des élèves ; (b) résultats des tests destinés à mesurer les qualités caractérisant les enseignants efficaces : connaissances, attitudes, traits de personnalité, notes univer-

sitaires, etc. ; (c) résultats obtenus par les élèves. Cette façon de procéder est encore très répandue, même si les instruments, les méthodes d'analyse et les bases théoriques sont désormais plus élaborés.

Begle (1979) cite un article de Morsh et Wilder qui rend compte des études réalisées entre 1900 et 1952, et où ces chercheurs critiquent la grande diversité des procédés et des instruments d'évaluation qui fait que les résultats ne sont pas comparables d'une époque ou d'un lieu à un autre ; ce qui explique peut-être pourquoi ces évaluations ne sont pas fortement corrélées aux résultats des élèves. Dans bon nombre d'études, on a essayé sans succès d'établir une corrélation entre les chiffres mesurant les caractéristiques des enseignants et ceux qui mesurent leur efficacité. L'article indique que, sur près de 700 corrélations de ce genre, moins de 200 prennent pour variable-critère les résultats des élèves. Ces corrélations sont comprises entre – 0,69 et +0,81, avec une moyenne de 0,065. Un très petit nombre d'entre elles concernent spécifiquement les mathématiques mais, considérés séparément, les résultats de ces études sont similaires.

Rosenshine (1971) a analysé des travaux de recherche plus récents (postérieurs à 1960) comparant le comportement des enseignants et les résultats des élèves. Son compte rendu concerne les recherches portant sur les trois types généraux de caractéristiques des enseignants, identifiés précédemment par Ryans : (a) la cordialité, par opposition à une attitude distante ; (b) le travail systématique par opposition à l'improvisation ; (c) l'imagination par opposition à la routine. En général, les enseignants possédant à un degré élevé la première caractéristique de chacun de ces couples d'attributs sont plus efficaces dans leur pratique pédagogique, encore que les résultats observés ne soient pas probants. D'autres études, portant sur l'évaluation des connaissances, des aptitudes, des attitudes, de l'expérience et de la préparation des enseignants, ne permettent pas davantage de faire des conclusions.

Certaines études (Rosenshine, 1971 ; et National Longitudinal Study of Mathematical Abilities (NLSMA)) ont démontré très clairement que l'efficacité des enseignants varie dans le temps chez des individus donnés. Geeslin (1972) a corrélé les mesures d'efficacité de deux groupes d'enseignants sur une période de deux ans et obtenu des coefficients de corrélation compris entre 0,01 et 0,35. Douze pour cent seulement de la variance observée pour la deuxième année peut s'expliquer par les chiffres de la première année.

La NLSMA considère aussi les résultats des élèves en relation avec treize variables se rapportant aux antécédents des enseignants, pour un grand nombre d'élèves de divers âges, lieux et niveaux d'aptitude cognitive. Il est procédé à des analyses approfondies à une et plusieurs variables. Sur les 2704 effets principaux possibles, 530 seulement (20 %) s'avèrent statistiquement significatifs. Begle remarque que les résultats "ne permettent pas d'affirmer qu'une quelconque de ces caractéristiques

constitue un puissant indicateur de l'efficacité des enseignants. Même la plus importante (le niveau du diplôme de mathématiques) ne présente de liaison significative avec les résultats des élèves en mathématiques que dans 24 % des cas" (Begle, 1979, p. 43). La NLSMA arrive à des résultats semblables pour sept variables relatives aux attitudes des enseignants. Dans ce cas, 24 % seulement des effets principaux (348 sur 1456) sont statistiquement significatifs.

Ces données sur l'efficacité des enseignants ainsi que d'autres, ont conduit Begle (1979, p. 54) à exprimer un point de vue plutôt pessimiste sur l'avenir de la recherche en ce domaine. Selon lui :

> La conclusion générale la plus importante à tirer de cet ensemble d'informations est sans doute que beaucoup de nos idées courantes sur les enseignants sont fausses ou, dans le meilleur des cas, repose sur des bases incertaines. Par exemple, aucun expert ne saurait faire une distinction entre enseignants efficaces et inefficaces en se fondant simplement sur les caractéristiques aisément observables des enseignants . . . Par conséquent, force est d'admettre que nous ne connaissons actuellement aucun moyen de déterminer par avance quels enseignants seront efficaces ou de savoir si tel ou tel programme de formation pédagogique produit bien des enseignants efficaces.

Le caractère décevant des recherches sur l'efficacité des enseignants tient sans aucun doute à ce que les résultats obtenus par les élèves sont la conséquence d'interactions complexes entre le maître, les élèves, la discipline enseignée, le contexte pédagogique, la catégorie socio-économique et certainement d'autres variables non encore identifiées. Déterminer les variables qui interviennent dans l'apprentissage ainsi que leur importance relative est une tâche qui reste à accomplir. Les techniques d'analyse statistique multivariée, dont l'emploi ne s'est généralisé que depuis peu, devraient grandement faciliter à l'avenir l'identification et la description des groupes de caractéristiques associés à un enseignant efficace. Mais pour le moment il ne paraît pas possible de fonder l'évaluation des enseignants, qu'ils soient en formation ou déjà en exercice, sur la mesure de leur efficacité.

Les domaines de performance de l'enseignant

Selon Smith (1980, p. 7), le savoir pédagogique est le fruit des efforts qui sont faits pour appliquer les principes d'un enseignement (et non d'un enseignant) efficace aux domaines de "performance" de l'enseignant dans le cadre scolaire. Contrairement aux approches précédentes de l'évaluation des enseignants, ce point de vue accorde beaucoup moins d'importance aux caractéristiques individuelles des enseignants comme indicateurs présumés d'efficacité. Il met au contraire l'accent sur la capacité de l'individu à traduire un ensemble de connaissances

pédagogiques bien défini en "actes" pédagogiques dans la situation didactique. On doit souligner que, pour Smith, une formation approfondie dans les diverses disciplines constitue un préalable essentiel à des études pédagogiques sérieuses. Pour mettre en oeuvre une telle approche, il est évidemment nécessaire de préciser ce que sont les "principes d'un enseignement efficace".

En fait, une telle approche opère un renversement de la procédure courante qui consiste à partir des objectifs pour définir ensuite les activités et les méthodes adaptées à leur réalisation. Selon Smith, cette procédure ne se justifie que quand le champ de connaissance dont il s'agit est bien établi et clairement élucidé. Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, ce n'est pas le cas en ce qui concerne l'efficacité des enseignants.

Quand on examine ce qu'on sait de l'enseignement, on constate qu'il en existe deux conceptualisations : la didactique (enseignement direct) et l'heuristique (enseignement indirect). La didactique est l'art et la science d'instruire de façon rigoureuse dans le but d'inculquer des connaissances et des aptitudes spécifiques. L'heuristique est l'art et la science d'apprendre aux élèves à enquêter, découvrir, chercher et trouver par eux-mêmes. L'une et l'autre conviennent à l'école moderne, même si les styles personnels varient d'un enseignant à l'autre.

Smith (1980) observe que les connaissances relatives à ces deux modes d'enseignement se répartissent en six catégories, qui délimitent les domaines de performance de l'enseignant dont il a été question ci-dessus. Ces catégories sont les suivantes :

1. L'observation.
2. Le diagnostic : (a) des capacités des élèves ; (b) des obstacles à l'apprentissage ; (c) des conditions de l'environnement ; (d) des programmes d'enseignement.
3. La planification : (a) du programme à court terme ; (b) du programme à long terme.
4. La gestion : (a) de l'espace, du temps et des moyens ; (b) de l'enseignement ; (c) des élèves.
5. La communication avec : (a) les collègues ; (b) les parents et les autres personnes extérieures ; (c) les élèves.
6. L'evaluation : (a) des résultats et de la conduite des élèves ; (b) du programme d'enseignement.

Ces catégories fournissent um cadre très utile pour des critères d'évaluation appropriés. Dans un des paragraphes qui vont suivre nous donnerons des exemples de la façon d'opérer à cet égard.

D'autres auteurs ont conceptualisé l'action d'enseigner selon des modalités applicables à l'évaluation des enseignants. Cooney (1980, 1981) a étudié comment les enseignants prennent leurs décisions et noté que : "... les enseignants collectent et codent l'information, déterminent des choix possibles et choisissent une ligne d'action"

(Cooney, p. 68). Il identifie trois grandes catégories de décisions : (a) les décisions cognitives, relatives au contenu et au choix de la méthode d'enseignement ; (b) les décisions affectives, relatives aux aspects interpersonnels de l'enseignement ; (c) les décisions de gestion, relatives à l'organisation du temps de travail et à la coordination d'ensemble des éléments de l'environnement scolaire. Chacune de ces catégories contient, bien sûr, de nombreuses sous-catégories. Cependant, ce système conceptuel est assez analogue au système proposé par Smith, qui détermine en premier lieu les domaines de performance de l'enseignant, et en tire ensuite des objectifs spécifiques. Cooney a aussi développé la conception de Henderson (1963), qui voit l'enseignement comme une relation entre trois composantes, les séquences d'action du maître, la discipline enseignée et le comportement des élèves, en lui ajoutant un quatrième élément : le contexte. Ce schéma est peut-être commode, mais se révèle un peu simpliste à la lumière des recherches effectuées dans ces quatre domaines, lorsqu'une image plus complexe se degage.

On tend actuellement à considérer le maître comme un "processeur" dynamique d'information, qui doit simultanéement traiter et modifier les paramètres dans chacune des quatre catégories. Il n'est donc pas surprenant que les tentatives faites antérieurement pour corréler les caractéristiques des enseignants, une par une ou par petits groupes avec les résultats des élèves, n'aient pas abouti à une caractérisation définitive de l'efficacité des enseignants.

Cooney (1980) se déclare en faveur du jugement professionnel comme "moyen viable et souhaitable d'évaluer les résultats d'un programme de formation des maîtres, . . . étant donné l'état des connaissances concernant aussi bien l'enseignement que la formation des enseignants". Cette déclaration peut paraître décevante si l'on considère la somme des recherches effectuées, mais elle peut se comprendre, étant donné la complexité de la tâche. Malgré cela, Cooney poursuit en recommandant d'inclure dans la formation des maîtres l'étude des techniques et concepts pédagogiques de base, tout en admettant qu'un enseignement réussi est toujours supérieur à la somme de ses parties ; pour illustrer sa thèse, il établit une analogie avec le champion de tennis, qui n'est pas seulement une personne ayant maîtrisé les bases du revers, du coup droit et du service. Mais même si les bases de l'enseignement ne sont pas élucidées avec précision, il convient d'inclure "le meilleur de ce que nous savons" dans tout programme professionnel. Nous en sommes bien d'accord. Malheureusement, on ne sait pas vraiment quelles sont les connaissances pédagogiques suffisamment importantes pour figurer dans les programmes de formation des enseignants et, par conséquent, faire l'objet d'une évaluation dans le cadre d'une pratique pédagogique concrète. Cela ne facilite pas la tâche de ceux qui s'efforcent d'élaborer un programme cohérent d'évaluation des enseignants.

Où en sommes-nous donc dans les efforts tentés pour évaluer de façon valable et fiable l'efficacité des enseignants-stagiaires de mathématiques dans les conditions réelles de l'enseignement ? Comment la recherche peut-elle guider ces efforts ? Existe-t-il des principes directeurs qui puissent faciliter cette tâche ? Nous allons examiner certaines de ces questions.

Produire des enseignants efficaces

Bien que les recherches sur l'efficacité des enseignants aient fourni peu d'informations précises sur les attributs précis qui caractérisent un enseignant efficace, il est communément admis que l'efficacité de l'enseignant est un facteur essentiel (sinon *le* facteur essentiel) intervenant dans l'apprentissage des élèves. Par ailleurs, les études sur l'efficacité des enseignants tendent généralement à prouver que c'est ce que le maître fait, et non ce qu'il est, qui détermine son efficacité, telle que les acquisitions des élèves permettent de la mesurer. Par conséquent, si mal défini que soit le concept d'efficacité des enseignants, accroître cette efficacité demeure un objectif fondamental.

D'après Medley (1979, p. 11), il existe deux grands moyens d'améliorer l'efficacité des enseignants : "Le premier consiste à améliorer les méthodes selon lesquelles leurs performances sont évaluées, l'autre à modifier les méthodes selon lesquelles ils sont formés". Il n'est guère imaginable qu'une de ces approches soit vraiment opérante sans l'autre, car les objectifs finals de l'évaluation comme de la formation, sont d'accroître la réussite de l'individu.

L'établissement d'objectifs pour les programmes

Qu'attendons-nous donc d'un programme de formation des maîtres ? Peck et Tucker (1973, p. 943), rendant compte des recherches sur la formation des enseignants, arrivent à plusieurs conclusions générales, dont les suivantes :

1. Une approche "systémique" de la formation des enseignants en accroît substantiellement l'efficacité. Une telle approche implique une série d'étapes qui reviennent de façon cyclique, à savoir : (a) spécification précise du comprtement constituant l'objectif de l'apprentissage ; (b) procédures de formation soigneusement planifiées visant explicitement à atteindre les objectifs fixés ; (c) mesure des résultats au regard des objectifs ; (d) rétroaction vers l'étudiant et l'instructeur ; (e) rentrée dans la procédure de formation ; (f) nouvelle mesure des résultats après la nouvelle phase de formation.
2. Les responsables de la formation des enseignants doivent mettre en

pratique ce qu'ils recommandent. Si l'on traite les élèves-maîtres de la façon dont eux-mêmes sont censés traiter leurs élèves, il y a plus de chances de les voir adopter le style souhaité.

3. Une expérience directe du rôle à assimiler suscite chez le futur enseignant le comportement pédagogique souhaité plus sûrement que des activités éloignées ou abstraites comme des cours de pédagogie théorique.
4. En employant tout ou partie des techniques mentionnées, on peut susciter un type d'apprentissage plus spontané, autonome et efficace, non seulement chez les enseignants, mais, à travers eux, chez leurs élèves.

Si, conformément aux recommandations précédentes, on adopte une approche systémique, la première phase consiste nécessairement à préciser les comportements pédagogiques qu'il convient de cultiver. Bien qu'il n'entre pas dans le champ de la présente étude de proposer des comportements pédagogiques spécifiques, nous partons de l'hypothèse que ces comportements relèvent, grosso modo, de domaines de performance semblables à ceux que Smith a déterminés et que nous avons étudiés plus haut dans ce chapitre, à savoir : le diagnostic (y compris l'observation), la planification, l'enseignement, la gestion, la communication et l'évaluation. Des exemples seront donnés plus loin.

En outre, nous savons que l'enseignement consiste en une interaction complexe entre les comportements non seulement dans divers domaines de performance, mais aussi à divers niveaux de performance. La meilleure façon de décrire ces niveaux consiste à adopter une taxonomie des comportements pédagogiques comme celle qui est présentée ci-dessous. Cette taxonomie (House, sous presse) est délibérément conçue sur le modèle de la taxonomie de Bloom (1956), ce qui explique les noms des catégories : on pourrait en trouver d'autres plus appropriés. Les six niveaux sont les suivants :

Connaissance

Le niveau "connaissance" concerne les faits, les processus, les théories, les techniques et les méthodes pédagogiques. Il comprend aussi la connaissance des mathématiques ainsi que celle du programme et des matériels scolaires d'enseignement des mathématiques. Dans la taxonomie des compétences du maître, ce domaine contient tous les niveaux de la taxonomie cognitive de Bloom. Cette composante de la formation des maîtres est habituellement associée à l'enseignement qu'ils reçoivent à l'Université. Elle se mesure habituellement au moyen de tests écrits ou par d'autres méthodes scolaires de type classique.

Compréhension

Le niveau "compréhension" concerne le fait d'avoir certains comporte-

ments déterminés dans des conditions contrôlées, comme l'enseignement mutuel, le micro-enseignement, les simulations, le jeu de rôle, etc. C'est la démonstration par l'individu d'une certaine aptitude, et le comportement qu'on attend de lui est d'habitude explicitement spécifié, si bien que l'étudiant connaît son objectif, à savoir le comportement qu'il doit manifester.

Application

Le niveau "application" concerne la planification et la gestion des activités et des matériels pédagogiques, dans le contexte de la classe. Il témoigne non seulement ce que l'individu peut faire, mais aussi ce qu'il fait effectivement. L'application suppose l'emploi, en temps opportun ou à la fréquence souhaitée, de techniques pédagogiques appropriées, dans le cadre du style d'enseignement normal.

Analyse

Au niveau de l'"analyse", l'enseignant réagit à l'élève, à la discipline enseignée et aux indices fournis par l'environnement pour choisir, organiser et gérer de façon efficace les programmes et les cours. Il identifie les éléments constitutifs du programme scolaire et les relations entre eux et il les considère en tant qu'ensemble organisé. Il réagit aussi spontanément aux élèves en tant qu'individus et ses actions et décisions découlent de motifs cohérents et conscients.

Synthèse

Au niveau de la "synthèse", l'individu organise son comportement pédagogique en un ensemble personnalisé, il doit intérioriser et faire les techniques d'enseignement un métier de même qu'il doit combiner les compétences sous-jacentes pour créer un style efficace qui lui est propre.

Evaluation

Au niveau de l'"évaluation", le maître juge l'efficacité de son enseignement en fonction de divers critères internes et externes, notamment la progression des élèves vers les objectifs visés, et il modifie son enseignement pour en accroître l'efficacité.

En combinant cette taxonomie des comportements pédagogiques avec les domaines de performance pédagogique identifiés plus haut, nous pouvons établir la matrice de performance de l'enseignant représentée au tableau 1. Cette matrice permet aux responsables de la

formation pédagogique de clarifier et de préciser les activités ayant pour double objectif d'améliorer l'évaluation et la formation des enseignants, dont nous donnerons plus loin des exemples.

Tableau 1. Matrice de performance de l'enseignant.

Niveaux de comportement pédagogique	Domaines de performance pédagogique					
	Diagnostic	Planification	Enseignement	Gestion	Communication	Evaluation
Evaluation						(F)
Synthèse			(E)			
Analyse				(D)		
Application		(C)				
Compréhension					(B)	
Connaissance	(A)					

On trouvera dans le tableau 2 des exemples relatifs aux cases marquées d'une lettre.

Avantages de l'approche matricielle

La représentation matricielle décrite ici présente plusieurs avantages. En particulier, elle centre l'attention sur certains aspects de l'enseignement qui ne sont pas faciles à rattacher à des objectifs comportementaux précis. Elle suggère des compétences plus globales, moins parcellisées, dont seront déduits les objectifs pédagogiques et les lignes d'action possibles. Elle a pour autre avantage d'orienter l'attention vers le progrès et le développement permanents des enseignants dont doivent tenir compte les objectifs de leur formation initiale et continue. Par exemple, les responsables de l'élaboration des programmes et de l'évaluation pourront faire une distinction entre les performances à attendre d'enseignants

débutants (performances dont beaucoup se situeront aux trois premiers niveaux de la taxonomie, encore qu'on puisse espérer observer quelques performances d'ordre supérieur) et celles qu'il convient plutôt d'attendre d'enseignants expérimentés. Cette différenciation devrait permettre de déterminer de façon plus réaliste ce qu'on peut exiger des enseignants débutants et contribuer à atténuer le sentiment de frustration qu'ils connaissent souvent. Elle devrait aussi aider les enseignants à évaluer leur propre comportement et à planifier leur propre développement professionnel sur une base permanente.

La taxonomie nous incite aussi à discerner une progression des compétences d'un niveau à l'autre. On peut prendre comme exemple les comportements liés au travail d'évaluation incombant au maître dans son enseignement. Au niveau de la connaissance, il s'agit de notions relatives aux différents types de tests, aux caractéristiques de fiabilité et de validité des tests, à l'emploi des tests d'évaluation formative, sommative ou diagnostique, etc. Au niveau de la compréhension, les compétences peuvent comprendre la démonstration par l'enseignant de son aptitude à élaborer des tests adaptés à certains buts spécifiques. L'application de ces compétences témoigne que l'enseignant fait effectivement usage de divers types d'évaluation. Aux niveaux supérieurs de l'analyse, de la synthèse et de l'évaluation, on vérifiera que les instruments et les méthodes d'évaluation de l'enseignant correspondent bien aux objectifs de son enseignement et qu'il les utilise pour améliorer celui-ci et apporter une aide individuelle plus efficace à ses élèves.

Les caractéristiques affectives de l'enseignant constituent aussi une composante qui peut traverser tous les niveaux de la taxonomie. Par exemple, les compétences affectives au niveau de la connaissance peuvent inclure la connaissance ou la reconnaissance des mécanismes de défense ou des techniques d'approche ou de dérobade des élèves, ou la notion de l'importance du soutien qu'apporte le maître par son empathie, sa cordialité ou son attitude positive à l'égard de l'apprentissage de l'élève. Au niveau de la compréhension, on peut attendre de l'enseignant qu'il manifeste des comportements de renforcement qu'il a appris ou qu'il identifie les indices se rapportant aux attitudes de l'élève ou du maître, dans des situations simulées. Au niveau de l'application et au-delà, les compétences du maître peuvent inclure l'emploi spontané des renforcements, de l'empathie, etc. dans les situations pédagogiques. Parmi les objectifs affectifs peuvent aussi figurer l'amélioration de l'attitude du maître à l'égard des divers éléments, personnels ou systèmes éducatifs, et la volonté de modifier son comportement pédagogique au fur et à mesure qu'il acquiert de nouvelles compétences.

Enfin, du fait que la matrice de performance repose sur le comportement de l'enseignant, on dispose de méthodes d'évaluation diverses. On évalue en général les performances au niveau de la connaissance par les méthodes scolaires conventionnelles, y compris les contrôles écrits. On

peut exiger des enseignants en formation initiale et en exercice qu'ils témoignent de leur connaissance des fondements des mathématiques, ainsi que des théories, techniques ou processus pédagogiques appropriés ou autres notions considérées comme pertinentes. Ils le feront par écrit ou oralement au moyen de tests, compositions, rapports, discussions ou autres formes d'exposés.

On peut évaluer les performances au niveau de la compréhension dans des situations contrôlées de durée limitée : enseignement mutuel, micro-enseignement, simulations, jeu de rôle, etc. L'observation par le personnel de formation pédagogique ou par d'autres spécialistes, les échelles de notation, les listes de contrôle et les enregistrements vidéo sont au nombre des moyens d'évaluation. Cela vaut aussi bien pour la formation initiale que pour la formation continue.

Aux autres niveaux, la performance suppose normalement la manifestation des comportements appropriés dans les conditions scolaires réelles sur une période prolongée. Cela concerne sans doute surtout l'évaluation des besoins des enseignants déjà en exercice mais aussi, à un degré moindre, celle des besoins des enseignants-stagiaires. Les moyens d'évaluation comprennent tous ceux cités à propos du niveau de la compréhension. L'évaluation de l'apprentissage des élèves peut aussi être utilisée comme indicateur de l'efficacité ou des besoins du maître.

Quelques exemples

Bien que les cases de la matrice du tableau 1 ne soient ni clairement délimitées ni disjointes, on peut en général attribuer aux objectifs fixés pour la formation des enseignants un emplacement principal dans ce tableau. Pour illustrer les éléments d'un programme de formation de professeurs de mathématiques du secondaire, nous détaillerons dans le tableau 2 les compétences, objectifs, activités d'apprentissage et évaluations représentatifs des six cases du tableau 1 marquées d'une lettre. Ces exemples débouchent sur une même considération finale : évaluer la performance des enseignants-stagiaires.

Tableau 2. Quelques exemples relatifs aux cases marquées d'une lettre.

Objectifs de performance	Objectifs pédagogiques	Activités d'apprentissage	Moyens d'évaluation
Case A Le stagiaire prendra conscience de l'importance de la méthode du diagnostic dans l'enseignement des mathématiques.	Pour une question de mathématique donnée, identifier les concepts constitutifs et les connaissances et aptitudes requises. Pour une question de mathématique donnée, identifier les sources probables d'erreur ou de difficultés pour l'élève. Effectuer une analyse des tâches pour le sujet considéré. Proposer des activités didactiques appropriées pour traiter le sujet considéré. Proposer des activités destinés à remédier, dans le travail des élèves, aux erreurs, prévisibles ou constatées.	Cours théoriques sur l'apprentissage et le développement des élèves. Réalisation, par le stagiaire, d'une analyse des tâches pour un choix de sujets. Etude des sources habituelles d'erreurs pour les élèves. Analyse du travail des élèves pour déterminer les types d'erreurs. Travail personnel du stagiaire pour rechercher les informations et les solutions pédagogiques permettant de remédier aux erreurs constatées. Etude de cas et (ou) aide individuelle à des élèves éprouvant des difficultés d'apprentissage. Examen des instruments de diagnostic disponibles. Tests de diagnostic et analyse des résultats obtenus par les élèves. Observation et aide individuelle des élèves dans les classes de mathématiques de l'éducation spéciale.	Tests de contrôle des connaissances sur l'apprentissage, l'enseignement de la méthode du diagnostic et d'autres concepts. Rapports oraux et écrits du stagiaire qui diagnostique les difficultiés d'un élève donné. Critique des activités d'apprentissage prévues pour y remédier. Critique des travaux produits (analyse de tâches, typologie des erreurs, interprétation des tests, etc.)

Objectifs de performance	Objectifs pédagogiques	Activités d'apprentissage	Moyens d'évaluation
Case B			
Le stagiaire fera preuve de bonnes capacités de communication.	Se montrer capable de mettre en oeuvre, dans la classe, divers modes de communication (par exemple : cours magistral, investigations dirigées, discussion). Reconnaître les stratégies défensives et les comportements non verbaux des élèves. Faire usage pendant les leçons de questions ouvertes. Susciter et entretenir la discussion. Utiliser les questions et les commentaires des élèves pour développer la leçon. Fournir aux élèves une rétroaction (information en retour et un renforcement positif.	Discussion des diverses formes de communication dans la classe. Observation de la classe et enregistrement systématique des modes de communication. Application de l'analyse des interactions au cours des leçons modèles ou des observations faites en classe ou d'un enregistrement vidéo, une leçon présentée par le stagiaire lui-même. Identification du niveau des questions dans les leçons modèles. Planification de la séquence des questions pour une leçon donnée. Comparaison des leçons modèles suivant l'approche pédagogique adoptée : cours magistral, investigations dirigées, discussion, etc. Observation, dans les conditions de la classe, d'exemples de comportement non verbal des élèves.	Dicussion écrite ou orale des effets de la communication dans la classe. Observation directe ou enregistrement vidéo de la leçon. Analyse des plans de leçon. Analyse des interactions pratiquée sur les étudiants.

Objectifs de performance	Objectifs pédagogiques	Activités d'apprentissage	Moyens d'évaluation
Case C			
Le stagiaire organisera et enseignera une unité didactique.	Assigner des objectifs appropriés à l'unité didactique et aux leçons. Elaborer des leçons correspondant aux objectifs globaux de l'unité didactique. Assurer, pendant la leçon, le rythme, les exercices, l'application et la rétroaction appropriés. Varier les activités d'apprentissage au cours de la leçon et d'une leçon à à l'autre. Diriger la classe d'une façon qui favorise l'apprentissage des élèves. Evaluer la progression et les résultats des élèves.	Rédiger des plans d'unités didactiques et de leçons. Recherche personnelle d'une documentation permettant de déterminer les stratégies et les matériels utiles pour les leçons. Enseigner une unité didactique à des élèves du secondaire. Elaborer des prétests, des post-tests et des interrogations de contrôle correspondant à l'unité didactique. Mesurer les acquisitions des élèves pendant et après l'unité didactique. Révision des leçons après la période d'enseignement.	Analyse, par le maître de stage, des plans rédigés. Observation par le maître de stage et par l'evaluateur. Observation de la classe par les condisciples du stagiaire. Enregistrement vidéo des leçons aux fins d'autoévaluation. Discussion des leçons avec le maître de stage. Evaluation de la mesure dans laquelle les élèves ont atteint les objectifs de l'unité didactique.

Objectifs de performance	Objectifs pédagogiques	Activités d'apprentissage	Moyens d'évaluation
Case D Le stagiaire considérera les élèves dans leur individualité et réagira en conséquence.	Reconnaître et accepter l'individualité des élèves. Ecouter les élèves. Attendre de chaque élève la réussite et la favoriser. Différencier les devoirs suivant les besoins des élèves. Faire participer les élèves à la planification des unités didactiques et des activités. Adapter l'enseignement aux besoins individuels des élèves. Reconnaître la diversité des styles d'apprentissage des élèves et identifier les différences de mode d'approche des problèmes entre les élèves.	Cours formels sur les théories psychologiques pertinentes, les différences individuelles, les besoins et les caractéristiques des élèves lents, particulièrement doués, handicapés, etc. Expérience pratique des programmes d'éducation spéciale. Expérience pratique de tutorat d'élèves particulièrement doués et d'élèves éprouvant des difficultés d'apprentissage. Administration, aux élèves, de tests diagnostiques, de tâches de Piaget, etc. Observation systématique d'élèves choisis dans des contextes variés, à l'intérieur et à l'extérieur de l'école. Etudes de cas et discussion de ces études avec des spécialistes et d'autres instructeurs. Enregistrement vidéo des leçons pour examen et discussion par le stagiaire, ses condisciples et (ou) l'instructeur.	Observation de l'interaction du stagiaire avec les élèves. Listes de contrôle pour évaluer la fréquence d'emploi par le stagiaire du renforcement positif, de la rétroaction vers les élèves, de l'utilisation des commentaires ou des questions des élèves dans l'enseignement, etc. Examen des plans de leçon et du journal de classe tenu par le stagiaire pour déterminer le degré de différenciation des leçons et des devoirs. Information en retour des élèves, leur évaluation de l'enseignement.

Objectifs de performance	Objectifs pédagogiques	Activités d'apprentissage	Moyens d'évaluation
Case E Le stagiaire intégrera les compétences de base en un style d'enseignement personnel et efficace.	Modeler le raisonnement mathématique des élèves. Manifester de l'enthousiasme à l'égard des mathématiques, de l'enseignement, de l'apprentissage et des élèves. Reconnaître les aspects mathématiques de certaines situations et intégrer les mathématiques aux autres domaines d'étude. Relier régulièrement ce qui est appris en classe aux acquisitions antérieures, aux sujets d'étude futurs, à l'expérience des élèves et aux questions qui les intéressent. Réagir aux aléas de la classe de façon appropriée et cohérente. Aider les élèves à prendre eux-mêmes en charge leurs tâches d'apprentissage et à les mener à bien.	Lecture des revues professionnelles et participation à des réunions professionnelles. Pratiquer la résolution de problèmes de façon régulière. Etablir des fichiers sur les ressources, stratégies et matériels pédagogiques. Discussions avec des personnes qui utilisent régulièrement les mathématiques dans divers contextes. Consultation des élèves ou entretiens avec eux afin de déterminer leurs attitudes et sujets d'intérêt. Discussions avec les enseignants d'autres matières à propos des relations entre les mathématiques et ces disciplines.	Observation en classe sur une longue période. Comparaison des observations pour évaluer la cohérence des comportements. Information en retour des élèves. Développement et apprentissage des élèves. Evaluation par les pairs de la contribution de l'enseignant stagiaire aux réunions, ateliers, etc.

Objectifs de performance	Objectifs pédagogiques	Activités d'apprentissage	Moyens d'évaluation
Case F Le stagiaire appréciera l'efficacité de son propre enseignement.	Faire preuve de confiance en sa propre capacité d'enseigner les mathématiques. Evaluer son propre enseignement en fonction de critères internes (par exemple, exactitude et cohérence logique), de critères externes (adéquation de l'enseignement aux élèves considérés) et de la progression des élèves vers les objectifs. Déterminer les comportements du stagiaire qui inhibent l'apprentissage des élèves et proposer des modifications de ces comportements. Evaluer dans quelle mesure les programmes et matériels scolaires sont adaptés aux buts pédagogiques fixés. Organiser et évaluer les leçons à la lumière des recherches actuelles sur la question.	Cours de type classique et études personnelles sur les recherches pertinentes de pédagogie relative aux mathématiques. Relations avec les collègues dans les réunions, ateliers et séminaires professionnels. Evaluations formatives et cumulatives de la progression des élèves. Observation de collègues et visite d'autres écoles. Formulation de proposition d'application immédiate et à long terme, pour son propre développement professionnel.	Observation par les collègues ou des évaluateurs extérieurs. Auto-évaluation. Information en retour des élèves. Mesure du développement et de l'apprentissage des élèves. Examen des contributions professionnelles par les pairs.

L'évaluation dans les programmes de formation pédagogique

Une des difficultés majeures de tout programme de formation pédagogique consiste à établir les critères au regard desquels doit être appréciée la performance des enseignants-stagiaires et à évaluer cette performance. Comme on l'a vu plus haut, l'absence de données valables sur la relation entre la performance de l'enseignant et l'apprentissage de l'élève, signifie que l'identification de critères comportementaux repose sur un jugement subjectif. Ces critères doivent dériver des objectifs que l'on aura fixés au mieux de son jugement professionnel, sur la base des connaissances existantes, si fragmentaires et incertaines soient-elles. Ils se justifient par le fait, non pas qu'ils reposent sur certaines connaissances,

mais qu'ils représentent une tentative systématique pour ne rien oublier d'essentiel et aboutissent à une évaluation spécifique et descriptive permettant une rétroaction corrective précise.

Lorsqu'on établit des critères comportementaux, on distingue couramment six catégories de critères :

1. Les *connaissances* que le stagiaire est censé acquérir ;
2. Les *produits* (travaux, événements) que l'on attend de lui ;
3. Les *comportements* qu'il aura ;
4. Les *attitudes* qu'il manifestera ;
5. Les *conséquences* (habituellement les acquisitions des élèves) qui résulteront de son intervention ;
6. Les *expériences* qu'il aura accumulées.

Cette dernière catégorie, celle des expériences, tient compte du fait que tous les résultats ne peuvent être déterminés à l'avance. Un exemple d'"expérience" est le cas où le stagiaire a pratiqué l'enseignement des mathématiques à divers niveaux et dans différents domaines, avec des classes d'aptitudes différentes et dans le cadre de différents types d'organisation scolaire. Les résultats des expériences ne sont pas prévisibles. Mais, le cas échéant, elles permettent au stagiaire de prendre conscience de l'unicité des individus et des situations ou de mieux percevoir ses propres points forts, points faibles, ses attitudes et préférences.

Il existe plusieurs approches pour formuler des critères comportementaux spécifiant la fréquence souhaitable des comportements et le degré d'exactitude ou de conformité requis, par rapport à un étalon, et permettant d'évaluer le comportement des stagiaires selon un barème de notation et une norme de performance, ou d'apprécier leur performance en fonction des acquisitions et du développement de leurs élèves. Dans tous les cas, il convient de définir les critères en tenant compte de questions comme celles-ci : comment le comportement attendu doit-il se manifester ? quand ? à quelle fréquence ? dans quelles situations ? dans combien de situations ? à quelles conditions ? à quel niveau de capacité ?

En règle générale, l'évaluation des compétences du stagiaire remplit deux fonctions principales : une fonction descriptive qui facilite l'enregistrement et l'analyse du comportement et permet une rétroaction corrective ; et une fonction de jugement qui permet au personnel de formation pédagogique et aux stagiaires de décider s'ils peuvent ou non passer à l'étape suivante. Bien que les problèmes associés à l'évaluation soient nombreux et complexes, plus les critères comportementaux sont explicites, plus l'appréciation et l'évaluation sont faciles et plus l'information que l'on retire de l'évaluation sera précise et utile. La considération finale est la stabilité et l'accroissement des compétences ; la démonstration isolée d'une certaine capacité par le stagiaire est donc beaucoup moins utile qu'une évaluation continue des com-

portements à des moments opportuns et à une fréquence appropriée. On doit constamment s'assurer que l'évaluation fournit des échantillons du comportement du stagiaire suffisants pour en déduire des estimations fiables de sa compétence.

Il existe de nombreux moyens d'évaluer les connaissances et les performances des enseignants-stagiaires. Les divers moyens d'évaluation proposés au tableau 2 pour les six compétences représentatives et les activités instrumentales associées illustrent l'éventail des possibilités. Le moyen choisi dépend du type de critères, relatifs au comportement et auquel se rapporte l'évaluation. En général, lorsqu'il s'agit de critères d'acquisition de connaissances, l'appréciation se fait à l'aide de tous les procédés traditionnels de type scolaire (questions, examens, compositions, résolution de problèmes, discussions, exposés oraux, etc.). Les résultats sont examinés et évalués au regard de certaines normes ou caractéristiques déterminées. On peut dénombrer les comportements et(ou) les noter. Les attitudes du stagiaire sont déterminées directement à partir de sa communication écrite ou orale ou déduites de sa communication non verbale. Les conséquences sont évaluées par la mesure des progrès des élèves. Les expériences sont dénombrées, consignées, décrites et(ou) soumises à l'évaluation du stagiaire lui-même.

Le tableau 3 présente un spécimen d'échelle de notation illustrant certains des éléments qui entrent en jeu dans l'évaluation de la performance des enseignants-stagiaires. On y trouvera un exemple de l'éventail des comportements à prendre en considération.

L'évaluation dans les programmes de formation pédagogique

Stagiaire :

Conseiller pédagogique :

Noter selon le barème ci-contre la performance du stagiaire pour chacune des compétences suivantes :

0. Non observé
1. Très faible
2. Faible
3. Passable
4. Bien
5. Très bien

*Note : Cette feuille de notation et les suivantes ont été conçues à l'University of Minnesota pour l'inspection des étudiants en stage pédagogique. (Etats-Unis d'Amérique)

Planification

1.	Construire des plans de leçons.	0	1	2	3	4	5
2.	Planifier des unités didactiques.	0	1	2	3	4	5
3.	Justifier les plans d'enseignement.	0	1	2	3	4	5
4.	Formuler des buts et objectifs explicites.	0	1	2	3	4	5
5.	Choisir un modèle d'enseignement adapté à un objectif pédagogique (par exemple, enseignement par investigation).						
6.	Choisir des procédés didactiques spécifiques pour aider les élèves à atteindre les objectifs.	0	1	2	3	4	5
7.	Trouver les matériels pédagogiques nécessaires à la mise en oeuvre des plans.	0	1	2	3	4	5
8.	Choisir les matériels pédagogiques selon des critères déterminés (par exemple, niveau de difficulté de lecture).	0	1	2	3	4	5
9.	Choisir des méthodes pédagogiques répondant aux besoins de développement des élèves.	0	1	2	3	4	5
10.	Concevoir des activités d'apprentissage	0	1	2	3	4	5
	permettant à tous les élèves de tirer le meilleur parti de leurs capacités.	0	1	2	3	4	5
11.	Tenir compte des besoins spéciaux (des handicapés, par exemple).	0	1	2	3	4	5
12.	Ordonner les activités d'apprentissage de manière à atteindre les objectifs.	0	1	2	3	4	5
13.	Créer dans la classe un environnement favorable à l'apprentissage.	0	1	2	3	4	5
14.	Intégrer des éléments stimulants aux plans d'enseignement (par exemple la variété).	0	1	2	3	4	5
15.	Evaluer un plan d'enseignement selon des normes explicites.	0	1	2	3	4	5
16.	Prévoir les effets possibles des plans d'enseignement sur les élèves.	0	1	2	3	4	5
17.	Préparation de canevas pour une présentation orale efficace.	0	1	2	3	4	5

Enseignement

1.	Utilisation de l'ordinateur en classe.	0	1	2	3	4	5
2.	Utilisation d'appareils audio-visuels en classe.	0	1	2	3	4	5
3.	Emploi d'un style de présentation efficace.	0	1	2	3	4	5
4.	Poser différents types de questions pour susciter chez les élèves différents types d'apprentissage.	0	1	2	3	4	5
5.	Retour d'information permanent vers les élèves, pour guider leur performance.	0	1	2	3	4	5
6.	Modification des plans pour tenir compte de réactions inattendues des élèves (intéressés, par exemple, par l'approfondissement d'un sujet particulier).	0	1	2	3	4	5
7.	Démonstration de principes ou de méthodes.	0	1	2	3	4	5
8.	Explication du mécanisme ou de la cause d'un phénomène.	0	1	2	3	4	5
9.	Définition de concepts.	0	1	2	3	4	5
10.	Développement de l'aptitude des élèves à poser des questions et à discuter.	0	1	2	3	4	5

Gestion de la classe

1.	Etablir un système de récompenses pour motiver les élèves.	0	1	2	3	4	5
2.	Encourager l'autonomie chez les élèves.	0	1	2	3	4	5
3.	Régler les problèmes de comportement en classe.	0	1	2	3	4	5
4.	Expliquer le comportement qui est attendu des élèves.	0	1	2	3	4	5
5.	Tenir les élèves pour responsables de leurs actes.	0	1	2	3	4	5
6.	Résoudre les conflits interpersonnels.	0	1	2	3	4	5
7.	Interaction avec les élèves ayant des besoins particuliers.	0	1	2	3	4	5

Diagnostic

1.	Tenir un journal des comportements typiques des élèves.	0	1	2	3	4	5
2.	Utiliser diverses méthodes pour situer les élèves.	0	1	2	3	4	5
3.	Conjuguer les informations de plusieurs sources pour déterminer les besoins des élèves.	0	1	2	3	4	5
4.	Déterminer le niveau de développement des élèves.	0	1	2	3	4	5
5.	Participer à des examens de cas avec les autres enseignants.	0	1	2	3	4	5
6.	Identifier les facteurs extérieurs à l'enseignement qui peuvent entraver les progrès des élèves.	0	1	2	3	4	5

Evaluation

1.	Etablir des critères d'évaluation.	0	1	2	3	4	5
2.	Interpréter les tests de connaissances standardisés.	0	1	2	3	4	5
3.	Créer des tests pour mesurer la progression des élèves.	0	1	2	3	4	5
4.	Utiliser des tests critériels.	0	1	2	3	4	5
5.	Evaluer l'efficacité de son enseignement personnel.	0	1	2	3	4	5
6.	Procéder à un examen critique de la performance des élèves (points forts, domaines à améliorer, etc.)	0	1	2	3	4	5
7.	Utiliser les résultats des évaluations pour améliorer l'enseignement.	0	1	2	3	4	5
8.	Informer les parents d'élèves sur leurs enfants.	0	1	2	3	4	5
9.	Noter les élèves.	0	1	2	3	4	5
10.	Evaluer les conséquences morales de ses propres actions.	0	1	2	3	4	5

Il est évident que le type d'évaluation décrit ci-dessus s'écarte du principe qui a le plus souvent cours en recherche, où l'on fixe traditionnellement des seuils de "certitude" élevés ($p < 0,01$, par exemple), l'idée étant qu'il vaut mieux rejeter quelque chose de vrai que d'admettre quelque chose de faux. Ici, en revanche, on considère l'évaluation comme une tentative visant à obtenir des données descriptives sur ce que l'enseignant-stagiaire est ou non capable de faire. L'évaluateur doit chercher à renvoyer au stagiaire une information précise et spécifique de telle sorte qu'il sache non seulement comment il est évalué mais aussi

pourquoi il fait l'objet de cette évaluation et quelle doit être l'orientation future de l'apprentissage. Une visite d'inspection occasionnelle de dix minutes faite par le conseiller pédagogique n'est d'aucune utilité pour le stagiaire, non plus qu'une évaluation qui se bornerait à indiquer que la leçon a été satisfaisante ou que les élèves ne progressent pas. Personne ne se soucie davantage des problèmes de la classe que l'enseignant, qui y passe toutes ses journées, et la plupart des enseignants ont le désir sincère de résoudre leurs problèmes et de continuer à améliorer leur enseignement. Ils ont besoin de conseils précis, qui tiennent compte de leurs points forts et qui apportent des idées utilisables leur permettant d'exploiter ces points forts tout en corrigeant leurs points faibles.

Même si les programmes présentent de nombreuses caractéristiques communes, chacun est différent. Les besoins, le personnel et les situations varient. Il est impossible d'élaborer un programme définitif ou de transplanter sans changement un programme d'un contexte à un autre. Il est possible, cependant, de donner un aperçu des principales mesures à adopter, des questions importantes qu'il faut se poser et auxquelles il faut répondre et des décisions majeures à prendre. Nous espérons que les éléments présentés dans ce chapitre pour servir à l'élaboration des programmes d'évaluation de la formation des enseignants favorisent le dialogue professionnel, dont l'objectif final est d'accroître l'efficacité de tous les enseignants.

Références

BARR, A. S. *et al.* 1961. Wisconsin Studies of the Measurement and Prediction of Teacher Effectiveness : A Summary of Investigations. *Journal of Experimental Education*, Vol. 30, pp. 1–55.

BEGLE, E. G. 1979. *Critical Variables in Mathematics Education.* Findings from a Survey of the Empirical Literature. Washington, D.C. Mathematics Association for American National Council of Teachers of Mathematics.

BLOOM, Bejamin S. *et al* 1969. *Taxonomie des objectifs pèdagogiques*, tome 1 : *Domaine cognitif* (traduit de l'américain par Marcel Lavallée) Montréal, Education Nouvelle.

COONEY, Thomas. 1980. Research on Teaching and Teacher Education. Dans : R. Shumway (dir. pub.) *Research in Mathematics Education.* Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

1981. Teacher's Decision Making. Dans : L. Fennema (dir. pub.) *Mathematics Education Research : Implications for the 80's.* Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics.

FEY, James T. 1980. Mathematics Teaching Today : Perspectives from Three National Surveys. Dans : *What are the Needs in Pre-college Science, Mathematics and Social Science Education ? Views from the Field.* Washington, D.C., National Science Foundation Office of Program Integration, Directorate for Science Education *SF* 80–89.

GEESLIN, W. ; BEGLE, E. G. 1972. *Teacher Effectiveness in Mathematics Instruction. NLSMA Reports, No. 28.* Stanford, Calif., School Mathematics Study Group (SMSG) Stanford University.

GIBNEY, T. ; KARNES, E. 1980. Mathematics Education 1955–1975. Dans : *What are the Needs in Pre-college Science, Mathematics and Social Science Education ? Views from the Field.* Washington, D.C., National Science Foundation Office of Program Integration, Directorate for Science Education, *SF* 80–89.

HELGESON, S. L., BLOSSER, P. ; HOWE, R. 1978. *The Status of Pre-college Science, Mathematics, and Social Science Education : 1955–1975.* Vol. 1, *Science Education.* Washington, D.C., U.S. Government Printing Office.

HELGESON, S. L. ; STAKE, R. ; WEISS, I., *et al.* 1978. *The Status of Pre-College Science, Mathematics, and Social Studies Educational Practices in U.S. Schools : An Overview and Summaries of Three Studies.* Washington, D.C. U.S. Government Printing Office.

HENDERSON, Kenneth. 1963. Research on Teaching Secondary School Mathematics. Dans : N.L. Gage (dir. pub.) *Handbook of Research on Teaching.* Chicago, Ill., Rand McNally.

HOUSE, Peggy A. *The Making of a Mathematics Teacher.* Columbus, Ohio, ERIC. (sous presse).

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (MAA). 1978. *Proceedings of a Conference on Prospects in Mathematics in the 1980's (PRIME-80).* Washington D.C. MAA.

MEDLEY, Donald M. 1979. The Effectiveness of Teachers. Dans : P. Peterson et H. Walberg (dirs. pub.), *Reserach on Teaching.* Berkeley, Calif. McCutchan.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). 1980. *An Agenda for Action ; Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston, Va., NCTM.

PECK, Robert F. ; TUCKER, James A. 1973. Research on Teacher Education. Dans : Robert M. W. Travers (dir. pub.), *Second Handbook of Research on Teaching.* Chicago, Ill., Rand McNally.

ROSENSHINE, B. 1970. The Stability of Teacher Effects Upon Student Achievement. *Review of Educational Research,* Vol. 40, No. 5, pp. 647–662.

. 1971. *Teaching Behaviours and Student Achievement.* Londres, National Foundation for Educational Research in England and Wales. (International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Studies, No. 1.)

RYANS, D. G. 1960. *Characteristics of Teachers : Their Descriptions, Comparisons, and Appraisal.* Washington, D.C., American Council on Education.

SMITH, B. O. 1980. *A Design for a School Pedagogy.* Washington, D.C., U.S. Department of Education, U.S. Government Printing Office (Pub. No. E-80-42000).

STAKE, Robert E. ; EASLEY Jack (dirs. pub.) 1978. *Case Studies in Science Education.* Washington, D.C., U.S. Government Printing Office. 2 volumes.

SUYDAM, Marilyn N. ; OSBORNE, Alan. 1977. *The Status of Pre-college Science, Mathematics and Social Science Education : 1955–1975.* Vol. II : *Mathematics Education.* Washington, D.C., U.S. Government Printing Office.

WEISS, Iris. 1978. *Report of the 1977 National Survey of Science, Mathematics and Social Studies Education.* Washington, D.C., U.S. Government Printing Office.

Andrew Herriot

Tendances actuelles de la formation initiale des enseignants du primaire en mathématiques

La formation en mathématiques des enseignants du primaire en Afrique australe

PRISM 81, séminaire sur les mathématiques à l'école primaire pour l'Afrique australe qui s'est tenu au Lesotho en 1981, a fait une grande place à la formation des maîtres. Parmi les questions évoquées et les recommandations formulées lors du séminaire, citons : le besoin ressenti par les instituteurs, de conseils plus directifs et plus détaillés, l'extension à trois ans de la durée de leur formation, l'élévation au "niveau ordinaire" (O level) du certificat d'études secondaires exigé à l'entrée, la fusion de l'enseignement des méthodes et des contenus en un cours intégré en rapport avec l'environnement, et la fourniture aux instituteurs d'un jeu de matériels et de documents de base.

En fait, la formation d'un enseignant de mathématiques du primaire varie considérablement d'un pays à l'autre en ce qui concerne la durée des études, le niveau exigé à l'entrée, la place accordée à la pratique de l'enseignement, les matériels pédagogiques dont disposent les maîtres en formation et le type d'enseignement qu'ils reçoivent. Le tableau 1 (p. 188) fait ressortir ces différences.

Le National Teacher Training College du Lesotho

Le Department de mathématiques du National Teacher Training College (NTTC) [Institut national de formation des enseignants] a élaboré un programme de mathématiques pour la formation initiale de tous les enseignants de mathématiques du primaire au Lesotho (Séminaire international sur l'enseignement des mathématiques, Swaziland, 1979). Il offre deux programmes distincts de trois ans, menant à deux certificats différents :

Tableau 1. La formation des enseignants de mathématiques du primaire dans certaines pays d'Afrique australe : comparaison.

Points de comparaison	Maurice	Malawi	Zambie	Swaziland	Lesotho
Niveau d'entrée	"O level" [niveau "ordinaire"] (Cambridge)	J.C.[1] – 2 ans M.C.E.[2] – 4 ans	"O level" [niveau "ordinaire"] (Cambridge)	J.C.[1] – 2 ans	J.C.[1] – 3 ans
Pratique Pédagogique	16 semaines	3 heures par semaine	10 semaines	12 semaines	40 semaines
Matériels pédagogiques utilisés	Livres du maître, manuels	Monographies	Manuels, guides fiches d'activité	Livres du maître, manuels	Livres du maître, dossiers-guides d'exercices pratiques, documents d'auto-instruction
Type d'enseignement	Séparation entre contenu et méthodes	Séparation entre contenu et méthodes	Séparation entre contenu et méthodes	Intégration du contenu et des méthodes	Intégration du contenu et des méthodes

1. Junior Certificate.
2. Malawi Certificate of Education.

Le certificat d'aptitude à l'enseignement primaire (Primary Teacher's Certificate, PTC) pour les étudiants titulaires du Junior Certificate (JC), qui seront qualifiés pour enseigner toutes les matières à l'école primaire.

Le certificat supérieur d'aptitude à l'enseignement primaire (Advanced Primary Teacher's Certificate, APTC) pour les étudiants du niveau "ordinaire" (O level), qui seront qualifiés pour occuper des postes de responsabilité à l'école primaire, comme administrateurs ou inspecteurs.

Une des innovations importantes des deux programmes est le stage pédagogique auquel est consacrée la deuxième année d'études. Tous les étudiants sont répartis entre les écoles du pays où ils mettent en pratique, sous contrôle, les techniques et les notions qu'ils ont apprises à l'Institut.

Après six ans de fontionnement, l'impact de l'Institut sur la situation de l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires du Lesotho commence à se faire sentir. Le tableau 2 donne les effectifs réels à l'entrée et à la sortie pour les deux programmes. Les incohérences apparentes des effectifs de sortie pour l'APTC résultent du fait que,

dans certains cas, les étudiants de l'APTC suffisamment mûrs et expérimentés sont dispensés de l'année de stage.

Tableau 2. Les candidats au PTC et à l'APTC de 1975 à 1981 : effectifs admis à l'entrée de chaque année du cycle et nombre de diplômés.

	PTC				APTC			
Année	I	II	III	Diplômes	I	II	III	Diplômes
1975	37	–	–	–	12	–	–	–
1976	155	33	–	–	36	12	–	–
1977	180	141	32	29	36	23	24	26
1978	186	174	134	122	39	–	58	54
1979	221	165	168	161	14	34	2	2
1980	242	198	181	175	32	11	37	36
1981	263	235	203		50	28	14	

L'Institut assure aussi la formation continue des enseignants de mathématiques du primaire par un système de "crédits" [points], qui permet aux maîtres qualifiés comme aux non qualifiés d'améliorer leurs connaissances et leurs aptitudes ainsi que leur situation professionnelle (NTTC, 1982).

Contenu du programme

Le programme du PTC a pour but de former des instituteurs capables d'enseigner les mathématiques à tous les niveaux du programme de l'enseignement primaire. Le programme de l'APTC couvre les mêmes sujets que le PTC, mais vise à former des enseignants capables d'assumer un rôle de direction dans le domaine des mathématiques à l'école primaire, soit comme chefs d'établissement soit comme inspecteurs. Les quatre cours proposés, désignés par MA 1.1, MA 1.3, MA 10.1 et MA 10.3, sont décrits brièvement ci-dessous :

MA 1.1. Etude du programme de l'enseignement primaire (petites classes). Ce cours a pour but d'initier les étudiants aux sujets enseignés au cours des premières années de la scolarité primaire. L'accent est mis sur les techniques pédagogiques, y compris l'élaboration des leçons, matériels, feuilles d'exercices, appareils et auxiliaires visuels, ainsi que sur l'amélioration des connaissances mathématiques. Les sujets traités sont notamment les suivants : les ensembles, les opérations sur les nombres entiers, les fractions et nombres décimaux, les figures géométriques, la mesure et les représentations graphiques.

MA 1.3. Etude du programme de l'enseignement primaire (grandes classes). Ce cours complète l'étude des sujets enseignés dans les grandes classes de l'école primaire. On continue à y insister sur l'élaboration de moyens didactiques appropriés et à approfondir le contenu mathématique. Les sujets traités sont notamment les

suivants : investigations de notions mathématiques, comment les enfants apprennent les mathématiques, les stratégies d'enseignement, l'établissement de feuilles d'exercices, la mesure, l'arithmétique appliquée, l'initiation à l'élaboration des programmes scolaires, et le langage dans les mathématiques du primaire.

MA 10.1. Ce cours, qui complète le cours MA 1.1, est destiné aux étudiants qui veulent se spécialiser dans l'administration des établissements de l'enseignement primaire (APTC). Les sujets comprennent ceux de MA 1.1, ainsi que : les principes de l'apprentissage, l'agencement en séquences du contenu mathématique, l'organisation d'un sujet, la rédaction des objectifs, l'organisation des leçons, les leçons modèles et les techniques d'enseignement.

MA 10.3. Ce cours complète celui du MA 1.3 et s'adresse aux étudiants qui poursuivent leur spécialisation en administration scolaire (APTC). Les sujets comprennent ceux du MA 1.3, ainsi que : les chiffres significatifs, le système métrique, les configurations numériques, le rapport, le taux, la proportion, les échelles, la symétrie, la surface et le volume, le cercle et la sphère, l'investigation mathématique et l'illustration graphique, la statistique élémentaire, la rédaction des documents pédagogiques, les techniques de contrôle des connaissances et l'étude des manuels et autres documents.

Le tableau 3 présente la structure des deux programmes de formation à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Tableau 3. Structure du PTC et de l'APTC.

	1ère année	2ème année	3ème année
PTC	MA .1 3 heures par semaine	Stage 30 semaines	MA 1.3 3 heures par semaine
APTC	MA 1.1 3 heures par semaine MA 10.1 3 heures par semaine au 3ème trimestre[1] seulement	Stage 40 semaines	MA 1.3 3 heures par semaine MA 10.3 3 heures par semaine au 2ème trimestre[1] seulement

1. L'année universitaire est composée de trois "trimestres" de onze semaines chacun.

Les méthodes utilisées pour enseigner tous les éléments des programmes de mathématiques du primaire sont les suivantes : cours magistraux d'une demi-heure (deux par semaine), séances de travaux dirigés d'une heure (deux par semaine) par petits groupes (25 étudiants), documents d'auto-instruction (Mathews, 1978), livres du maître sur des sujets particuliers et séances de micro-enseignement.

Les cours magistraux

Chaque semaine, on expose un sujet on une notion en suivant de près les lignes directrices formulées dans le programme de mathématiques de l'enseignement primaire établi par le Ministère de l'education, en ayant recours, quand c'est possible, à un mode de présentation multimédias. L'ensemble de la promotion se voit ainsi présenter, dans le cadre d'une conférence soigneusement préparée, des objectifs clairs, des matériels concrets (élaborés sur place ou d'origine commerciale) et des activités appropriées. On veille à tirer le maximum de profit de ces exposés généraux, qui permettent de transmettre les informations de façon organisée, après quoi les notions fondamentales peuvent être approfondies dans un cadre moins formel. Les tableaux 4 et 5 indiquent la succession des thèmes de ces cours magistraux pendant les deux années d'études.

Séances de travaux dirigés par petits groupes

Au cours de ces séances d'une heure, les étudiants peuvent : fabriquer des appareils, des auxiliaires visuels, des jeux, etc., mener des activités organisées à deux niveaux : le leur et celui des enfants, en utilisant des matériels pratiques élaborés en classe. Consulter des documents de référence comme le programme scolaire officiel, les manuels et les guides ainsi que les documents élaborés à l'Institut ; faire des exercices de mathématiques en répondant aux questions puisées dans la banque d'items, discuter avec leur directeur d'études du devoir à venir ; revoir le contenu du cours magistral, en particulier dans l'optique des objectifs de l'enseignement qu'ils suivent.

Tableau 4. Succession des sujets traités dans le cadre des exposés magistraux du cours de mathématiques de première année MA 1.1.

Semaine	Premier trimestre	Deuxième trimestre	Troisième trimestre
1	Tris	Longueur : unités arbitraires (pièces de monnaie) Unités métriques	Fractions : Multiplication
2	Relations : Comparaison Ordre	Masse : (pièces de monnaie) Unités du système international[1]	Fractions : Division
3	Correspondance bijective Nombre cardinal Ensembles[1]	Algorithme de la soustraction	Construction de prismes
4	Nombre ordinal Conservation	Algorithme de la multiplication	Capacité, volume Volume[1]
5	Addition Soustraction Paires ordonnées[1]	Algorithme de la division	Aires Unités métriques Unités de surface[1]
6	Multiplication Division	Symétrie en deux dimensions	Nombres décimaux Numération décimale Addition
7	Classification des figures bidimensionnelles et tridimensionnelles	Mosaïques Aires (unités arbitraires)	Nombres décimaux soustraction Multiplication
8	Représentation graphique	Angles d'un polygone Angle[1] Degrés	Nombres décimaux Division Nombres à deux et trois décimales[1]
9	Numération décimale Anciens systèmes de numérotation[1] (Blocs de Dienes)	Notion de fraction	Le temps
10	Numération décimale (boulier)	Fractions Addition Soustraction	
11	Algorithme de l'addition (pièces de monnaie)		

1. Cours magistral de base.

Tableau 5. Succession des sujets traités dans le cadre des exposés magistraux du cours de mathématiques de troisième année MA 1.3.

Semaine	Premier trimestre	Deuxième trimestre	Troisième trimestre
1	Investigations sur l'aire et le périmètre (avec mm, g, ml) Révision du système international[1]	Rapport Taux	Lecture d'échelles
2	Investigations (suite)	Proportion	Notions simples de topographie
3	Comment les enfants apprennent les mathématiques	Pourcentages	Dessin à l'échelle
4	L'élaboration d'une feuille d'exercices	Profit et perte	Equations Balance simple
5	Approximations (chiffres significatifs, décimales)	Arithmétique civique	Nombres algébriques Addition
6	Diviseurs, multiples, nombres premiers	Arithmétique civique	Nombres algébriques Soustraction
7	Configurations numériques	π	Elaboration des programmes scolaires
8	Le temps (horloge de 24 heures)	Aire des figures planes	Elaboration des programmes scolaires
9	Vitesse, temps, distance (illustration graphique)	Volume des prismes	Problèmes linguistiques
10	Propriétés des triangles et des quadrilatères	Aire d'une surface	
11	Autres figures tridimensionnelles (classification, construction)		

1. Cours magistral de base.

Les séances par petits groupes sont consacrées à des travaux individuels, à des activités de groupe et à des exposés restreints. Leur forme dépend beaucoup de la réaction du groupe aux matériels pédagogiques.

Si, par exemple, la séance de travaux dirigés doit comprendre une fabrication d'appareils, les étudiants, sur instructions de leur directeur d'études, préparent les matériels dont ils auront besoin avant la séance. Comme le cours magistral a lieu pendant la semaine qui précède les séances par petits groupes et comme les étudiants reçoivent leur matériel pédagogique au commencement de chaque trimestre, il est facile d'organiser les activités de groupe assez longtemps à l'avance.

Dossiers-guides d'exercices pratiques

Le Département de mathématiques a mis au point des dossiers-guides d'exercices pratiques couvrant le contenu du programme d'enseignement de l'Institut Chaque semaine, un nouveau sujet est présenté aux étudiants suivant l'ordre indiqué dans les tableaux 4 et 5. Ces sujets sont regroupés dans des dossiers trimestriels édités par l'Institut. La structure de base de chaque dossier comporte cinq parties, dont certaines peuvent ne pas concerner une semaine particulière. Ces parties sont les suivantes : résumé des cours magistraux, bases mathématiques pertinentes, exercices pratiques destinés aux enfants comme à l'étudiant, questions tirées de la banque d'items et instructions pour un devoir (quatre par trimestre). Ces dossiers recouvrent l'ensemble des sujets du programme officiel de mathématiques de l'enseignement primaire établi par le Ministère de l'éducation. Ils peuvent servir de guide pour l'auto-instruction, ou comme document de référence aussi bien à l'Institut qu'en dehors. Ils sont très utiles au cours de l'année de stage comme source d'idées pour la préparation des leçons et les activités de la classe.

Documents d'auto-instruction

Des monographies apportent à l'étudiant un complément au programme de base. Ces monographies ont pour thème les ensembles, les tris, les relations, la correspondance bijective, les diagrammes en bâtons et en secteurs. Lorsqu'elles sont rédigées en liaison avec les activités d'apprentissage, elles constituent pour les étudiants d'utiles documents de référence complémentaires. La bibliothèque contient des exemplaires de tous les documents d'auto-instruction. Ils sont tirés en un grand nombre d'exemplaires pour pouvoir être utilisés pendant les séances de travaux dirigés, en cas de besoin.

On continue à s'efforcer de perfectionner les techniques de rédaction des documents d'auto-instruction. Cette activité a été favorisée par la création du Centre de documentation sur les matériels pédagogiques (Instructional materials Resource Centers, IMRC), qui constitue un service distinct au sein du Ministère de l'éducation. L'IMRC fournit aide et conseils sur des questions comme la conception, la réalisation, la publication et l'évaluation des documents d'auto-instruction. L'Institut

a pour politique de faire rédiger ces documents en coopération, en partant du principe que les étudiants et les enseignants peuvent et doivent trouver des idées de nouveaux sujets.

Livres du maître

Ce type d'ouvrages a pour origine la nécessité d'expliquer de façon plus détaillée aux étudiants certains sujets du programme de mathématiques, tels que les données numériques fondamentales, les fractions ou les jeux mathématiques. L'accent y est mis sur les objectifs, les activités et les matériels de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Le livre du maître indique à l'étudiant les divers niveaux auxquels présenter un sujet, de manière à lui donner une vue claire du programme de mathématiques enseigné dans le primaire. La préparation des maîtres à l'année de stage comprend une initiation à l'agencement des sujets en mathématiques. La production de livres du maître répondant à leurs besoins constitue une activité permanente du Département.

Micro-enseignement

En première année, chaque étudiant a la possibilité de pratiquer et de maîtriser certaines techniques pédagogiques en utilisant le méthode du micro-enseignement. Il s'agit d'activités pratiques menées avec les enfants, et au cours desquelles l'étudiant bénéficie d'un retour d'information immédiat grâce à un enregistrement vidéo et reçoit l'assistance et les conseils d'un directeur d'études expérimenté. Le micro-enseignement est organisé par le Département d'études pédagogiques et les départements spécialisés dans chaque matière doivent y contribuer. Ces contributions peuvent revêtir diverses formes : assistance aux étudiants pour la formulation des objectifs pédagogiques, fourniture d'un matériel pratique approprié ou présentation d'exemples de questions-tests pouvant être posées au cours des activités pédagogiques. Comme les séances de travaux dirigés autorisent une certaine souplesse d'approche, il est souvent possible d'y aborder les problèmes qui se posent au cours des séances de micro-enseignement.

Auxiliaires d'enseignement

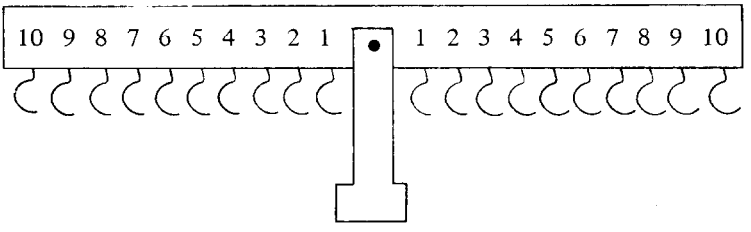
L'élaboration de matériels d'enseignement appropriés (planches et autres accessoires visuels, divers éléments d'appareils, feuilles d'exercices et items de questionnaires d'évaluation) est une des aptitudes des professeurs de mathématiques du primaire qui doit être développée en tant que composante à part entière de leur formation.

Exercices

En conséquence, il est demandé à tous les étudiants de construire un

jeu d'appareils simples, comprenant, par exemple, un boulier à points, des modèles du système de numération décimale, des tableaux de fractions, un cadran d'horloge, un géoplan, diverses figures tridimensionnelles, un indicateur d'angle, une roue à lanterne, divers récipients calibrés, un clinomètre et une balance simple. On trouvera ci-dessous un exemple de devoir donné aux étudiants, relatif à la construction d'un appareil.

1. Pourquoi vous devez faire ce devoir
   Cet appareil peut être utilisé à divers niveaux de la scolarité primaire ; il sera donc très utile aussi bien au maître qu'à l'élève.
2. Que savez-vous déjà sur cet appareil ?
   Vous avez déjà étudié l'emploi de l'égalisateur en classe.
3. Comment allez-vous procéder ?
   Vous devez fabriquer un égalisateur ayant 10 crochets de chaque côté.
   Il doit être bien équilibré.
   Vous devez fixer 10 anneaux à votre égalisateur.



   Vous êtes libre de créer votre propre modèle mais il doit ressembler à peu près au schéma ci-dessus.
4. Quels sont les matériaux dont vous aurez besoin ?
   Du bois ou de l'aggloméré. Des clous ou des crochets d'un type ou d'un autre. Des anneaux, ou des capsules de bouteilles percées.
5. Que devez-vous RENDRE ? COMMENT cela sera-t-il noté ?
   Un égalisateur. Il doit être bien équilibré, aussi bien avec que sans les anneaux (10 points). Il doit être solide et résistant (5 points). Il doit être soigné et bien réalisé (5 points). Total = 20 points.

Les planches murales et accessoires visuels qui font partie du matériel élaboré par les étudiants servent en particulier à enseigner la symétrie, les pourcentages, les correspondances bijectives, les configurations numériques, les fractions, les figures et échelles de divers types. Pendant les cours magistraux, on montre aux étudiants comment utiliser les accessoires visuels en classe de mathématiques. Une grande importance est attachée à l'emploi en classe d'un bon matériel visuel, qui suscite l'intérêt initial et favorise l'acquisition de notions mathématiques nouvelles. On trouvera ci-dessous un exemple de devoir dans lequel les étudiants ont à élaborer une planche murale.

Devoir
1. Vous allez fabriquer un grand tableau mural utilisable dans l'enseignement par grands ou petits groupes.
2. Cette planche portera des diagrammes géométriques représentant, par des hachures, une grande variété de fractions (y compris des fractions décimales) et les pourcentages équivalents.
3. Vous devez employer les figures géométriques suivantes : carré, rectangle, cercle, triangle, pentagone, hexagone, octogone.
4. Votre planche illustrera les pourcentages suivants :
   2½ %, 15 %, 25 %, 30 %, 33⅓ %, 45 %, 60 %, 62,5 %, 75 %, 90 %.

Feuilles d'exercices

Ces dernières années, les feuilles d'exercices sont devenues, à l'école primaire, un des meilleurs matériels de remplacement du manuel. Elles comprennent habituellement un certain nombre d'instructions ou de questions ayant pour but soit de faciliter la compréhension, soit de servir d'outil d'évaluation. Les étudiants sont encouragés à adapter l'évaluation à leurs objectifs ; la rédaction des questions des feuilles d'exercices est une activité pédagogique très importante, qui permet de contrôler si les enfants ont, ou non, compris une notion donnée.

On montre aussi aux étudiants comment une question ou instruction figurant sur une feuille d'exercices peut conduire à une activité qui nécessitera éventuellement une découverte. Les directives sont énoncées comme le montre l'exemple ci-dessous tiré du dossier d'exercices hebdomadaire en offrant aux étudiants, dans un premier temps, un modèle à suivre. Le rédaction de feuilles d'exercices peut faire l'objet de devoirs et de questions d'examen, ce qui montre l'importance que le Départment de mathématiques attache à cette aptitude. En voici un exemple :

Rédaction d'une feuille d'exercices

Directives
Conception : Simplicité : ne poser qu'une question ou ne donner qu'une instruction à la fois. Celles-ci ne doivent pas être trop difficiles.
Quelle est la valeur du 2 dans le nombre 204 ?
Activités pratiques : On peut demander aux élèves de faire quelque chose en rapport avec le sujet enseigné, un dessin ou un calcul.
Evaluer la longueur de la classe, en mètres.
Mesurer la longueur de la classe.
Tracer un angle de 60°.
Diviser 10,2 par 10.

Ordre :
Aller du plus simple au plus difficile ; la progression des questions doit se faire en augmentant graduellement la difficulté.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$$

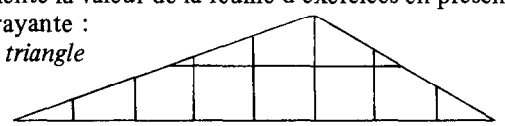
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

Ordre d'enseignement : autant que possible, les questions doivent être posées dans l'ordre qui a été suivi pour l'enseignement du sujet comme dans le cas des questions précédentes.

Présentation :
Espace pour la réponse : les réponses ou les diagrammes devront figurer en face de chaque question : laisser par conséquent un espace suffisant.
Représenter le nombre 382
sur le boulier ci-contre
Quelle est la longueur du segment
AB ci-dessous ?

A B ..... cm

Style :
Diagrammes et figures : on augmente la valeur de la feuille d'exercices en présentant les questions sous une forme attrayante :
Quelle est la surface, en cm^2, du triangle représenté ici ?



Langage :
Employer des mots simples et des phrases courtes.
"Quel est . . . ", "dessiner . . .",
"trouver . . .", etc.

Le stage pédagogique

Il s'agit d'un stage pratique d'enseignement qui se déroule en deuxième année d'études. Au cours de cette année les étudiants assurent un service d'enseignement normal dans une école et doivent, sous contrôle, appliquer les techniques et connaissances professionnelles acquises à l'Institut en première année. Pour se préparer à ce stage, ils s'exercent en particulier à rédiger des objectifs, établir des plans de leçons, élaborer des matériels pédagogiques, se familiariser avec le programme scolaire et les manuels en vigueur et rédiger des items de questionnaires d'évaluation

en rapport avec les objectifs.

Le contrôle revêt la forme d'inspections hebdomadaires par un directeur d'études attaché au secteur où les écoles sont situées. Ce conseiller pédagogique, spécialement formé dans le cadre d'un programme de l'Université nationale du Lesotho bénéficiant du soutien de l'Unesco, apporte ses conseils à une douzaine d'élèves-enseignants. La manière d'évaluer la qualité d'un enseignant a fait l'objet de nombreux débats depuis l'inauguration de l'année de stage. Le compte rendu d'un séminaire sur l'évaluation en formation pédagogique organisé en 1978 à Maseru par le Comité d'évaluation de l'Institut, sous le patronage de l'Unesco, récapitule clairement les procédés actuellement utilisés. Le groupe qui a étudié la question des compétences pédagogiques a formulé les conclusions et recommandations suivantes :

Trente compétences ont été identifiées, entrant dans les grandes catégories suivantes : (a) Organisation avant la leçon (planification), pendant la leçon ; (b) Techniques (méthodes et matériels) ; et (c) Relations.

L'évaluation objective est impossible, mais l'évaluation subjective peut être injuste. Une liste de compétences (servant de liste de contrôle) aidera le conseiller pédagogique, ainsi que le stagiaire, à apprécier progrès et aptitudes.

Il n'y a que trois notes de stage possibles : Refusé : pour les stagiaires dont il est clair qu'ils se sont trompés dans le choix de leur profession. Admis : pour la majorité des stagiaires. Excellent : pour les stagiaires exceptionnels, reconnus par les conseillers pédagogiques et directeurs d'études comme étant des enseignants de qualité.

Des visites d'inspection sont effectuées par les directeurs d'études de l'Institut de façon régulière. Ces visites sont combinées avec des ateliers destinés aux stagiaires, aux étudiants et aux maîtres en exercice du secteur. Les thèmes des ateliers comprennent les jeux mathématiques, la fabrication d'appareils, la mesure, le principe de la numération et les opérations.

Tous les ateliers animés par les directeurs d'études de l'Institut mettent l'accent sur l'approche pratique ; en suivant ces ateliers d'une journée, les maîtres acquièrent des matériels et des idées qu'ils utiliseront dans leur propre classe. Le Département de mathématiques considère cette activité pédagogique comme un service essentiel pour tous les maîtres. L'information en retour que recueillent les directeurs d'études de l'Institut au cours de ces sessions hebdomadaires est précieuse et leur permet de conserver un contact indispensable avec l'école primaire. On prévoit actuellement la construction de trente-cinq centres de documentation, situés chacun dans un des "sites" où les étudiants de NTTC passent leur année de stage. Chaque centre sera équipé d'un duplicateur, d'un classeur, de matériels scolaires, de livres, de papier, de documents d'auto-instruction, de livres du maître, de guides d'exercices pratiques

et d'autres matériels produits par des centres pédagogiques comme le Centre national d'élaboration des programmes scolaires. Ces centres de documentation sont conçus pour être des lieux de réunion où les maîtres peuvent débattre de questions pédagogiques et échanger leurs idées sur l'enseignement des mathématiques.

L'évaluation

On utilise deux méthodes pour contrôler le niveau de performance et les progrès des étudiants :

Examens trimestriels comprenant des items objectifs (Hamilton 1976 et 1977) et des questions ouvertes à réponse longue structurées de façon à permettre une notation objective selon un barême soigneusement conçu ;

Contrôle continu, comprenant divers devoirs écrits ou travaux concrets.

Toutes les notes nouvelles sont relevées, on en calcule la moyenne et on opère des ajustements au moyen de techniques de pondération et de standardisation (Herriot, 1978). Un niveau de performance minimal est exigé de l'étudiant pour qu'il puisse passer d'une année d'études à la suivante. Les étudiants qui n'obtiennent pas la note requise peuvent se représenter à l'examen. Ces étudiants sont notés selon des techniques d'évaluation basées sur des critères (Mathews, 1980).

Conclusion

Au NTTC, les aspects novateurs qui semblent présenter de l'intérêt pour ce qui est de la formation des enseignants de mathématiques du primaire sont les suivants : l'existence de dossiers-guides d'exercices pratiques qui recouvrent un champ étendu mais dont la structure offre suffisamment de souplesse pour répondre aux besoins des différents directeurs d'études et enseignants ; la variété des méthodes d'apprentissage (micro-enseignement, techniques d'auto-instruction) ; l'année de stage pédagogique, assortie d'inspections combinées à des ateliers ; l'élaboration de jeux de matériels pédagogiques.

Le NTTC s'apprête à entreprendre une évaluation de l'année de stage pédagogique. Cet important travail permettra de disposer d'informations essentielles sur les innovations introduites dans la formation des professeurs de mathématiques du primaire. Les informations recueillies auprès des étudiants et des professeurs montrent qu'il conviendrait d'étudier plus avant l'idée d'un guide d'exercices pratiques détaillé comme ceux qu'élabore le NTTC afin que tous les instituteurs, y compris ceux qui sont en cours de formation, puissent en bénéficier.

Références

HAMILTON, J. S. 1976 et 1977. *Consultancy Reports on Objective Testing.* Cambridge, Test Development and Research Unit (13 Harvey Road, Cambridge, CB1 2ET, Royaume-Uni).

HERRIOT, Andrew. 1978. *Assessment at NTTC.* Maseru (Lesotho), National Teacher Training College (NTTC).

INTERNATIONAL SEMINAR ON MATHEMATICS EDUCATION, Mbabane (Swaziland), 1979. *The Development of Teaching Materials for School Mathematics : Report of the Seminar.* Londres, British Council.

MATHEWS, J. C. 1978. *Consultancy Report on Writing Self-Instructional Materials.* Maseru (Lesotho), National Teacher Training College (NTTC).

. 1980. *Consultancy Report on Criterion-Referenced Testing Techniques.* Maseru (Lesotho), National Teacher Training College (NTTC).

NATIONAL TEACHER TRAINING COLLEGE (NTTC). 1982. *Student Handbook 1982–1984.* NTTC, In-service Division, P.O. Box 1393, Maseru (Lesotho).

PRISM 1981 : Southern African Regional Seminar on Primary School Mathematics, Maseru (Lesotho). *Primary School Mathematics in Southern Africa : A Seminar Report.* Londres, British Council, 1982.

Alan Osborne et James Schultz

Tendances actuelles de la formation continue des enseignants du primaire en mathématiques

De tout temps, le bon enseignant a cherché à se développer sur le plan intellectuel et à accroître sans cesse ses compétences. Beaucoup d'établissements et d'organismes considèrent que l'apport le plus précieux de la formation continue réside dans l'aide et le soutien qu'elle fournit aux maîtres dans cet effort de développement intellectuel et de perfectionnement pédagogique.

Les méthodes et mécanismes de la formation continue sont nombreux et variés. Les exemples suivants donnent une idée de l'éventail des établissements qui assurent cette formation et de la portée des programmes proposés :

Les écoles locales peuvent organiser à l'intention des maîtres un atelier sur les matériels pédagogiques employés dans l'enseignement des mathématiques, sous la direction d'un instituteur ayant utilisé ces matériels ;

Une université locale peut aider les maîtres à apprendre à déceler parmi leurs élèves ceux qui sont doués pour les mathématiques et à élaborer à leur intention des matériels didactiques spéciaux ;

Une entreprise peut fournir un soutien financier à des maîtres qui effectuent une étude sur les applications des mathématiques et organiser des visites de ses installations locales permettant d'observer certaines utilisations des mathématiques ;

Une autorité régionale dans le domaine de l'éducation peut aider les maîtres et les chefs d'établissement à prendre conscience des avantages d'une rénovation du programme scolaire de mathématiques et à prévoir les problèmes qui peuvent en résulter.

La participation des établissements et des organismes à la formation continue dans le cadre de programmes de ce type se développe à travers le monde. On rencontre désormais moins de gens qui pensent que la formation des maîtres est "terminée" à la fin de leur formation initiale. Les sciences de l'éducation, les systèmes scolaires, les associations professionnelles, les universités et les groupes d'entreprises acceptent de prendre en charge une partie de la formation continue des maîtres au-delà de leur formation initiale.

Le développement pris ces dernières décennies par les divers modes

d'approche de la formation continue permet désormais d'identifier les principes propres à assurer le succès de cette formation. Le présent chapitre exposera ces principes et énoncera des recommandations précises sur la manière d'utiliser de façon constructive le temps de travail des enseignants et de tirer parti des autres ressources disponibles pour organiser une formation continue qui puisse aboutir à un meilleur apprentissage des mathématiques à l'école.

Les deux principes fondamentaux de la formation continue sont les suivants : premièrement, le programme de formation continue doit être étroitement relié aux mathématiques enseignées , deuxièmement, ce programme doit chercher à accroître l'initiative au niveau local. Pour que la formation continue soit vraiment profitable aux enseignants, ses responsables doivent avoir présents à l'esprit les buts et les objectifs du programme de mathématiques et savoir jusqu'à quel point ils sont atteints. Dans la plupart des cas, les ressources disponibles pour la formation continue sont si restreintes que les organisateurs ne peuvent guère se permettre de consacrer de l'argent à des activités en marge des mathématiques enseignées à l'école.

Le premier des principes mentionnés ci-dessus n'a pas pour effet de limiter le niveau des mathématiques faisant l'objet de la formation continue aux niveaux de l'enseignement pratiqué par le maître ; il est indispensable en effet que les enseignants aient la maîtrise de notions mathématiques d'un niveau très supérieur à celui auquel ils enseignent. Ce principe n'implique pas non plus que la formation continue doive avoir pour seul but l'application des programmes scolaires existants ; l'approfondissement du programme en vigueur n'est qu'un premier pas vers un but plus important : préparer les maîtres à participer à l'élaboration de programmes nouveaux et meilleurs. C"est particulièrement vrai pour les pays en développement où, bien souvent, aucun programme existant ne répond aux besoins culturels spécifiques des enfants ; dans ce cas, c'est l'initiative locale qui est la plus apte à introduire les changements nécessaires.

De plus en plus, l'expérience montre qu'une des meilleures raisons de relier étroitement le programme de formation continue au programme de mathématiques enseigné est, qu'ainsi, les maîtres sont plus motivés pour participer et contribuer à ses activités. Des enquêtes effectuées aux Etats-Unis d'Amérique parmi les maîtres et les inspecteurs (Osborne et Bowling, 1977) montrent qu'une formation continue centrée sur les sujets enseignés par les maîtres flatte leur sens professionnel. L'attrait en est renforcé si l'on fait participer les maîtres à la planification des activités de formation continue et à l'estimation des besoins de ceux à qui elle s'adresse. Les maîtres se sentent alors une responsabilité vis-à-vis du programme et sont plus enclins à travailler davantage pour en assurer le succès.

Estimation des besoins

Il est indispensable au succès d'un programme de formation continue de déterminer quelles sont les difficultés des maîtres qui doivent y participer. Une appréciation précise de ces difficultés permet non seulement de mettre l'accent sur les points importants et d'employer efficacement les ressources, mais aussi d'assurer une correspondance étroite entre la formation continue et le programme de mathématiques enseigné. Les processus qui répondent aux préoccupations des maîtres favorisent leur intérêt pour les activités proposées. Par exemple, on peut penser que des maîtres consciencieux, attentifs aux situations auxquelles ils sont confrontés dans leur pratique pédagogique, seront soucieux qu'on les aide à surmonter les difficultés qu'ils rencontrent. Il peut s'agir, par exemple, d'une difficulté à répondre à certaines questions posées par les élèves ou à satisfaire les besoins particuliers des élèves plus lents ou plus doués que la moyenne de la classe.

Il n'est pas facile d'identifier les besoins de formation continue. Les maîtres qui s'y efforcent peuvent se trouver gênés par une perspective trop étroitement limitée à leur propre classe. Il se peut qu'il leur faille un supplément d'information pour pouvoir juger en connaissance de cause de l'efficacité de l'enseignement des mathématiques à l'école. Les inspecteurs ou les administrateurs du système scolaire connaissent peut-être mieux qu'eux les différents besoins de formation continue, car ils ont plus de renseignements sur les résultats des élèves en mathématiques. Les universitaires ou les autorités nationales qui sont au fait des tendances du moment et ont sans doute une vision plus large des besoins nationaux ou régionaux peuvent avoir sur le rôle de la formation continue un point de vue encore différent. L'aptitude des personnes qui ne sont pas instituteurs à estimer les besoins de ces derniers, dépend de la fréquence de leurs contacts avec les écoles et de leur connaissance des besoins nationaux.

Parmi les pratiques qui facilitent la communication entre les instituteurs en exercice et les responsables de l'évaluation des besoins de formation continue figurent les observations de classes, les réunions préliminaires, les questionnaires préalables au cycle de formation et les évaluations *a posteriori* de celui-ci.

Plusieurs types d'observations de classes se sont révélés utiles pour estimer les besoins, notamment les suivants :

Visites de professeurs d'Université dans les écoles pour relever les points forts et les points faibles de l'enseignement qui y est pratiqué ;

Observation des professeurs d'Université par les instituteurs, ou ;

Observation (par les instituteurs) d'enseignants principaux dans une "classe modèle" ;

Observation de démonstrations pédagogiques ;

Observation mutuelle des instituteurs entre eux.

Les réunions préliminaires entre les maîtres et les responsables des programmes de formation continue apportent d'utiles informations aux animateurs de cette formation. Ces réunions montrent aussi aux maîtres qu'un effort sincère est fait pour s'informer de leurs besoins et les inclure dans les thèmes du cycle de formation. Les questionnaires préalables constituent une autre source d'information efficiace sur le contenu souhaité. Ils peuvent aussi alerter l'animateur de la formation sur toute divergence entre l'attente des maîtres et la formation prévue, ce qui permettra soit de remédier à cette divergence, soit d'expliquer aux intéressés sa raison d'être. Les évaluations *a posteriori* sont utiles pour arrêter le contenu des futurs programmes de formation.

Les processus d'évaluation décrits ci-dessus sont efficaces, tout en étant rapides et peu coûteux, contrairement à d'autres méthodes qui peuvent également être pertinentes. Par exemple, il est bon d'examiner, lors d'épreures et de tests d'aptitude les résultats concrets obtenus par les élèves en mathématiques dans les classes suivantes, surtout lorsque ces tests sont en rapport avec les objectifs du programme scolaire. Quand les maîtres participent à l'estimation des besoins, leur opinion sur l'efficacité du programme scolaire est mieux reçue si elle est nuancée par les résultats objectifs de leurs élèves. Cependant, quand ils collectent ces faits, les organisateurs de la formation doivent se fixer une limite sur le plan de la quantité et du type d'informations recueillies, car cette recherche peut être coûteuse par rapport aux bénéfices qu'on en tire.

Les types de cours

Les programmes de formation continue peuvent revêtir des formes variées ; parmi les plus courantes, citons : les ateliers ; les cours universitaires donnés à l'Université ; les cours universitaires donnés à l'école même ; les consultants extérieurs ; les réunions professionnelles ; la littérature professionnelle.

Les ateliers sont particulièrement fructueux s'ils permettent une participation intense en un temps minimal. Le lieu et le moment choisis pour les ateliers doivent convenir aux maîtres. Comme ils exigent beaucoup de préparation, les ateliers ne peuvent en général recevoir qu'un petit nombre de participants. Ils diffèrent des cours traditionnels par le fait que les maîtres y travaillent avec des matériels concrets et y ont des activités variées au lieu de se borner à suivre des cours magistraux.

Les cours universitaires donnés sur le campus sont commodes pour le personnel enseignant de l'Université ; mais ils ne le sont pas souvent pour les participants. Ceux-ci doivent en particulier se soumettre aux formalités administratives complexes qui semblent sévir dans la plupart des universités modernes (en matière d'inscription, de droits, de stationnement, de transport). Les organisateurs doivent prêter une grande

attention à ce genre de problèmes. Les cours qui ont lieu à l'Université sont en principe conçus pour répondre aux besoins de participants venant de plusieurs écoles différentes. Comme les besoins sont rarement identiques d'une école à l'autre, le cours est habituellement conçu en fonction d'une moyenne qui peut ne pas convenir entièrement à tous. Bien entendu, les écoles ne sont pas toutes commodément situées par rapport à l'Université. Pour les instituteurs exerçant dans des zones rurales reculées, il faut prévoir des dispositions spéciales pour leur permettre d'assister aux cours de formation continue dispensés à l'Université.

Les universitaires qui enseignent la pédagogie mathématique ont de plus en plus tendance à dispenser leurs cours dans les écoles mêmes, ce qui fait faire des économies de temps et d'argent aux instituteurs qui y assistent. En outre, le professeur de formation continue peut, s'il arrive assez tôt à l'école, mettre à profit la présence des enfants pour faire des démonstrations pédagogiques. L'expérience montre que les instituteurs apprécient ces cours dispensés sur place, qui rendent la formation continue plus crédible, surtout lorsque le formateur prend part aux activités de la classe et effectue des démonstrations.

Les réunions des associations professionnelles et la documentation qu'elles envoient à leurs membres constituent une autre forme de formation continue. L'aide qu'elles apportent est moins immédiate que dans le cas d'un cycle classique de formation et c'est au maître qu'il incombe de faire le lien entre les communications faites à ces réunions et la situation scolaire locale. L'adhésion à une organisation professionnelle donne habituellement droit à un abonnement à une ou plusieurs revues et à des livres et publications destinés aux enseignants. Pour les organismes qui apportent leur soutien à la formation continue, l'argent consacré aux adhésions aux organisations professionnelles constitue un investissement rentable. Certaines organisations encouragent l'adhésion des établissement eux-mêmes. En adhérant, une école peut ainsi mettre les revues et autres publications à la disposition de tous ses enseignants dans la bibliothèque des maîtres.

Les questions qui se posent

Les responsables des programmes de formation continue sont confrontés à plusieurs grandes questions, parmi lesquelles les suivantes semblent importantes dans la plupart des situations :

Quelle priorité faut-il accorder aux divers besoins des maîtres sur le plan de la formation continue ?

Comment les systèmes scolaires, les universités et établissements de formation des enseignants et les organismes d'Etat peuvent-ils

contribuer à répondre aux besoins de formation continue des instituteurs ?

Comment doit-on traiter les problèmes résultant de différences culturelles que pose l'établissement de programmes de formation continue à l'intention des pays en développement ?

Ces questions ne sont pas indépendantes mais au contraire étroitement liées entre elles. Nous allons ci-après examiner chacune afin de dégager les principes sur lesquels fonder des recommandations concrètes.

Quelle priorité faut-il accorder aux divers besoins des maîtres sur le plan de la formation continue ?

Ces besoins apparaissent souvent immédiats aux maîtres eux-mêmes : "Que faire dans ma classe demain ?". Cependant, comme le savent les responsables de l'enseignement des mathématiques, la compréhension de cette matière et celle de sa pédagogie vont de pair, ces deux domaines de la connaissance formant un ensemble cohérent. Quand les besoins immédiats et les objectifs finals ne coïncident pas, cela peut entraîner des difficultés pour la formation continue.

Les besoins à long terme sont particulièrement importants pour les enseignants de mathématiques du primaire. Un des défauts les plus courants des enseignants du primaire est la tendance à voir les mathématiques comme un ensemble d'algorithmes rigides ou comme un recueil de "recettes". Si la formation continue ne s'intéresse qu'à ce qu'il faut enseigner le lendemain, elle ne parviendra pas à développer chez les maîtres le jugement nécessaire pour leur permettre d'évaluer de nouvelles approches pédagogiques ou des contenus différents. La formation continue doit avoir pour but de forger un jugement et une compétence suffisants pour qu'un nouveau cours de formation ne soit pas nécessaire dans un avenir immédiat. Il ne faut cependant pas négliger les besoins à court terme. Il y a deux avantages à leur prêter attention : d'une part, les notions apprises sont immédiatement applicables, d'autre part, le souci de ces besoins contribue à susciter un intérêt qui peut être mis au service des objectifs à long terme.

Il faut veiller à ce que les cours destinés aux maîtres offrent un mélange équilibré et harmonieux de contenu mathématique et de méthodologie, en faisant place à la théorie comme à la pratique. Le rapport du Comité consultatif national pour l'enseignement des mathématiques (NACOME, 1977) recommande d'éviter toute dichotomie dans la politique adoptée en matière de pédagogie mathématique. Ce rapport met en évidence les écueils que l'on rencontre lorsqu'on met exclusivement l'accent sur l'un des termes d'alternatives telles que contenu-méthodes ou théorie-pratique. La plupart des instituteurs comprennent mieux le contenu mathématique quand on le leur présente dans le contexte de leur travail quotidien auprès des enfants, et l'enseignement pédagogique est plus efficace quand il est centré sur les notions mathé-

matiques que l'instituteur doit enseigner. Séparer l'étude du contenu de celle des méthodes revient à réconnaître la nature des décisions que les instituteurs sont appelés à prendre. Il s'agit rarement de décisions exclusivement mathématiques ou exclusivement méthodologiques.

L'intégration, dans la formation continue, de la théorie et de la pratique est nécessaire pour deux raisons. En premier lieu, il faut que les instituteurs aient le sentiment que leur investissement de temps et d'énergie dans le programme de formation continue a été rentable. Si le cours est purement théorique, le soin étant laissé aux maîtres de faire le lien avec la pratique scolaire, leur travail personnel s'en trouve considérablement accru. La plupart des instituteurs de primaire assurent un service déjà si lourd qu'ils sont obligés de peser soigneusement les bénéfices qu'ils peuvent escompter du temps consacré à la formation continue, aux dépens du temps consacré aux enfants. Les maîtres efficients considèrent leurs responsabilitiés envers les enfants comme prioritaires, et acceptent mal des cours de formation continue purement théoriques. En second lieu, l'apprentissage de la théorie bénéficie de la pratique, et réciproquement. Une base théorique solide fournit une base conceptuelle qui permet au maître d'apprendre et de se rappeler plus facilement les techniques pratiques. La pratique est à l'apprentissage de la théorie ce que les exemples d'application sont à l'apprentissage des mathématiques.

On peut organiser les ateliers, les démonstrations et les autres activités de formation continue autour de deux sortes de thèmes, par exemple : "Quelle est la meilleure façon d'enseigner les fractions ?" ou "Que permettent d'enseigner les réglettes de Cuisenaire ?" Selon nous, de ces deux exemples de thèmes, on doit préférer le premier. En effet, ce sont des concepts mathématiques que nous enseignons à l'école primaire, et "une fraction" constitute un concept mathématique alors qu'un réglette de Cuisenaire n'en est pas un. Certes, les réglettes de Cuisenaire sont des outils efficaces pour enseigner de nombreuses notions mathématiques du niveau primaire. Elles méritent sans doute qu'on s'y intéresse dans le cadre de la formation continue, mais il vaut mieux en parler à propos de la façon d'enseigner tel ou tel concept que d'en faire un sujet à part entière.

Compte tenu de ce qui précède, nous recommanderons ce qui suit :

Il faut s'intéresser aux besoins des enseignants, aussi bien à court terme qu'à long terme mais en mettant l'accent sur les besoins à long terme.

Les cours de formation continue doivent associer contenu et méthodes, en jetant un pont entre la théorie et la pratique.

Les cours de formation continue doivent être centrés sur les sujets mathématiques, et non sur les matériels pédagogiques.

Il convient d'utiliser, pour estimer les besoins de formation continue des maîtres, les observations de classes, les réunions préliminaires, les questionnaires préablables, les évaluations *a posteriori* et les

données relatives aux résultats des élèves.

Comment les administrations scolaires, les universités et instituts de formation des enseignants et les organismes d'Etat peuvent-ils contribuer à répondre aux besoins de formation continue des maîtres ?

Le problème du financement de la formation continue est de ceux qui ne peuvent être résolus que par les autorités locales, régionales et nationales. Il s'avère particulièrement ardu lorsqu'une administration scolaire a déjà du mal à trouver des maîtres en nombre suffisant pour ses classes. Il n'existe pas de principes directeurs permettant de dire quelle part du budget de l'éducation il convient d'affecter à la formation continue. Dans les pays en développement, on observe (Otte, 1979 ; Osborne, 1977 ; Skilbeck *et al* 1977 ; National Council of Teachers of Mathematics, 1980) que l'existence de services de formation continue organisé par l'administration scolaire améliore de façon significative l'attitude des maîtres. On peut raisonnablement en déduire que la formation continue a pour effet d'accroître la stabilité d'emploi des maîtres et donc de rentabiliser l'investissement que le système éducatif a consacré à leur formation initiale. En outre, il faut remarquer que la prolongation de la durée de service des maîtres peut être d'une grande utilité aux instituteurs débutants, si les anciens leur montrent la voie. Lorsqu'elle est bien conçue, la formation continue prépare au leadership, elle est donc doublement rentable : elle permet d'étendre la durée de service des maîtres et d'aider non seulement les aînés, mais aussi les jeunes maîtres, à devenir des enseignants plus efficaces.

On a indiqué précédemment, à propos des besoins, que les programmes de formation continue devraient être élaborés en collaboration par les instituteurs et par d'autres instances – administrations scolaires, établissements d'enseignement supérieur et organismes d'Etat – mieux placées qu'eux pour juger de questions de portée générale, et qui sont en mesure de contribuer à la mise en place de la formation continue.

Les administrations scolaires ont la possibilité de libérer les instituteurs de leurs obligations pour leur permettre d'organiser des programmes de formation continue ou des réunions professionnelles et d'y participer. De même qu'elles peuvent fournir des installations et du matériel pour les cours dispensés sur place, et gérer des bibliothèques professionnelles où les maîtres trouveront des revues conçues à leur intention. Elles sont à même de contribuer à faire connaître les activités de formation et d'inciter les maîtres à y participer. Bref, les administrations scolaires peuvent, en fournissant le soutien financier nécessaire, aider les maîtres à bénéficier d'une formation continue.

Les instituts de formation des enseignants doivent se rendre compte qu'il leur incombe – et c'est là une responsabilité importante – de

concourir au développement de la formation continue. Dans la plupart des pays, la poursuite d'études universitaires au-delà du niveau de qualification initial requis constitue un des principaux moyens d'accéder, dans le système scolaire, à des responsabilités plus importantes, à une qualification plus élevée et à de meilleurs salaires. La poursuite d'études supérieures de niveau avancé est donc pour la plupart des maîtres un important mode de formation continue.

Cependant, beaucoup d'établissements d'enseignement supérieur ont des difficultés à mettre au point des cours qui répondent aux besoins de formation continue des maîtres. La "respectabilité universitaire", souvent assimilée à la recherche, la tradition des établissements et les prétendues "normes universitaires" jouent parfois contre l'organisation de cours de perfectionnement professionnel. Cela tend à restreindre la participation des universitaires à la formation pédagogique continue, en particulier pour ce qui est des contenus. En général, le personnel des établissements d'enseignement supérieur se consacre essentiellement à l'enseignement et à la recherche. La formation pédagogique au-delà du niveau requis pour la qualification initiale des maîtres ne constitue qu'une faible part de leur activité. Les enseignants des départements universitaires sont parfois peu enclins à aider des maîtres qui ont interrompu leurs études supérieures depuis plusieurs années et qui, peut-être, ont besoin de rénover leur conception des mathématiques, de la psychologie ou des théories pédagogiques. Chercher à organiser un cours qui soit intéressant et utile pour des instituteurs dont les mathématiques sont "rouillées" peut sembler incongru à un universitaire qui enseigne à des étudiants des mathématiques de haut niveau. Pourtant, l'Université ne saurait se soustraire à ses obligations envers les instituteurs. Il est d'ailleurs de son intérêt même de faire tout ce qui est en son pourvoir pour que ses futurs étudiants aient au départ les meilleures bases possibles.

Les établissements d'enseignement supérieur doivent proposer des cours qui répondent à la fois au besoin qu'ont les maîtres de poursuivre des études théoriques à un niveau élémentaire et à leur besoin d'acquérir des "unités de valeur" universitaires. Pour cela, il leur faut dispenser un enseignement qui soit axé sur les notions élémentaires enseignées à l'école primaire, tout en témoignant d'une grande rigueur intellectuelle. Il est parfaitement possible, par exemple, de concevoir une approche de l'étude des fractions décimales dénuée de tout formalisme, et cependant stimulante pour l'esprit.

On peut encore réduire l'écart entre les besoins des maîtres et les enseignements traditionnellement offerts par les établissements d'enseignement supérieur en dissociant les normes fixées pour l'admission à certains cours de celles qui sont exigées pour la préparation d'un diplôme supérieur de mathématiques. Cette distinction permettrait aux instituteurs de capitaliser des "unités de valeur" comptant pour certains grades

universitaires autres qu'une licence ou une maîtrise de mathématiques proprement dite. Les administrations scolaires peuvent contribuer à ce résultat en reconnaissant officiellement comme perfectionnement professionnel certains cycles d'études mathématiques.

Les établissements d'enseignement supérieur doivent faciliter l'accès des maîtres à leurs programmes de formation continue, en veillant à ce que les formalités d'inscription, les affectations d'enseignants, les moyens offerts et l'organisation des cours soient conçus de manière à encourager leur participation.

Les organismes d'Etat ont aussi un rôle important à jouer dans la formation continue. Ils peuvent apporter une assistance directe aux autorités locales ou les aider dans leur tâche d'organisation en leur fournissant les compétences et les ressources dont elles ne disposent par sur place. Par exemple, le Département de l'éducation de l'Ohio a produit récemment deux brochures destinées à aider les maîtres dans leur enseignement de la résolution de problèmes (Meiring, 1980). Ceci fait suite à une recommandation du National Council of Teachers of Mathematics (1980) préconisant qu'une place nettement plus importante soit accordée dans le programme scolaire à la résolution de problèmes. Ces brochures sont conçues pour l'étude individuelle, mais elles pourraient être très utiles dans le cadre d'un cours de formation continue. Elles contiennent de nombreux exemples de stratégies heuristiques de résolution de problèmes dans le contexte d'une classe et elles initient les maîtres aux bases de la théorie et de la recherche qui leur permettront d'élaborer un enseignement sur ce sujet. Cette documentation destinée aux maîtres a été conçue pour répondre à un besoin spécifique, ressenti par de nombreux systèmes scolaires locaux, et qu'il aurait été difficile de satisfaire par des cours organisés au niveau local.

La formation continue des maîtres est importante à bien des égards. L'activité des écoles doit refléter un dessein national, en répondant aux besoins du pays et de ses habitants et en permettant leur développement. Mais ces besoins présentent des variations régionales et locales importantes dont il faut tenir compte. Au Nigéria, par exemple, les écoles des régions côtières et celles des régions minières ou agricoles de l'intérieur préparent les élèves à des styles de vie différents, qui comportent des besoins différents dans le domaines des mathématiques. Les projets pédagogiques doivent refléter ces différences régionales, et la formation continue des instituteurs doit revêtir dans chaque cas la forme qui convient. La répartition des ressources affectées à la formation continue doit tenir compte des besoins aussi bien nationaux que régionaux. En outre, en ce qui concerne la fourniture de services d'assistances aux maîtres, il existe dans beaucoup de pays de profondes différences de capacités et de volonté entre les autorités locales du système éducationnel. Selon nous, l'aide de l'Etat à la formation continue doit prendre en considération ces différences régionales.

L'existence de services de formation continue des maîtres suppose une politique délibérée en ce sens et des ressources suffisantes pour subventionner et faire fonctionner les programmes. Cette formation entre en concurrence avec d'autres nécessités sociales. La plupart des pays et des Etats n'ont que des ressources limitées à consacrer à la santé, au développement industriel, à l'agriculture, à la défense et à d'autres services. Ceux qui décident des priorités d'utilisation des ressources ont besoin d'informations pour pouvoir faire des choix rationnels. Les services de l'éducation ont, à tous les niveaux, le devoir important de fournir aux décideurs les informations dont ils ont besoin pour justifier le soutien apporté à la formation continue.

Les pays développés, où tous les enfants bénéficient depuis longtemps des bienfaits de l'éducation, ont pris l'habitude de confier la responsabilité de la formation continue des maîtres, dans une grande mesure, au personnel des établissements scolaires eux-mêmes, en considérant qu'il s'agit d'un travail d'animation relevant de sa compétence. Bien que les écoles recherchent aussi des idées à l'extérieur, elles assument en grande partie cette responsabilité. Cette tendance des administrations scolaires à susciter leurs propres animateurs et formateurs apparaît comme une solution naturelle et judicieuse, que la planification à long terme de la formation continue devrait favoriser.

L'étude qui précède conduit aux recommandations suivantes :

Les écoles devraient libérer les maîtres de leurs obligations afin de leur permettre d'organiser la formation continue, d'y participer et d'assister aux réunions professionnelles ;

Les écoles devraient mettre des moyens, des bibliothèques professionnelles et des matériels à la disposition des programmes de formation continue et contribuer à faire connaître les possibilités de formation ;

Toute expérience de formation continue appropriée devrait entrer en ligne de compte pour la promotion et la rémunération des enseignants, qu'elle se situe dans le domaine des mathématiques, dans des disciplines voisines ou en pédagogie des mathématiques, du moment que cette expérience contribue au perfectionnement professionnel du maître ;

Les universités et les établissements de formation des enseignants devraient considérer la conception et la mise en oeuvre de programmes de formation continue comme une de leurs attributions majeures ;

Les universités devraient offrir, en mathématiques et dans les disciplines voisines, des cours qui soient intéressants et stimulants pour l'esprit tout en restant adaptés et accessibles à des instituteurs qui n'ont parfois que des bases assez faibles en mathématiques ;

Les universités et les instituts de formation des enseignants devraient faciliter l'accès des programmes de formation continue aux maîtres,

en choisissant soigneusement le personnel, le moment et le lieu des cours et en simplifiant les formalités d'inscription ;

Les organismes d'Etat devraient concourir au soutien et au développement de la formation continue, notamment en produisant des matériels didactiques adaptés aux cours de formation ;

La formation continue devrait répondre aux besoins tant régionaux que nationaux ;

Les services de l'éducation de l'Etat devraient fournir aux instances législatives et administratives l'information dont elles ont besoin pour arrêter leur politique et affecter des ressources à la formation continue ;

Les autorités scolaires devraient chercher à développer les capacités de formation continue à l'intérieur même du système scolaire, afin de protéger leur investissement dans la formation initiale.

Comment résoudre les problèmes résultant de différences culturelles et économiques que pose l'élaboration de programmes de formation continue à l'intention des pays en développement ?

Le président du Comité interaméricain de l'enseignement des mathématiques, le Brésilien Ubiratan d'Ambrosio (1981) compare l'enseignement dans les pays développés et dans les pays en développement en ces termes :

> Dans la plupart des pays développés, les systèmes scolaires sont déjà solidement établis, et répondent aux besoins d'une population assez stable. Dans ces pays, le développement du système éducatif revient essentiellement à améliorer ce qui existe déjà. Dans un sens, l'objectif est de gérer une opération en cours, avec des améliorations. Les changements ne peuvent donc être profonds. La structure existante, principalement celle du pouvoir du maître dans sa classe, est bien établie et très difficile à modifier.
>
> Dans les pays en développement, le système éducatif est en construction. Le risque d'échafauder un système périmé dès le départ incite à analyser de façon approfondie ce qu'on peut attendre d'un système éducatif dans son ensemble. Les problèmes de nature globale inhérents au processus du développement nécessitent une planification d'ensemble de l'éducation faisant intervenir toutes les structures sociales d'une nation : son peuple, ses sociétés et ses cultures. Cette planification doit fixer les priorités futures des besoins présents.

Bienvenado Nebres (1981) de l'Université Ateneo de Manila, décrit, du point de vue de l'Asie du Sud-Est, la dépendance vis-à-vis des pays développés, dans le domaine de l'enseignement des mathématiques :

> L'aspect paradoxal de ces différences (en particulier la pénurie des ressources

matérielles et humaines) est que, au lieu de nous isoler de l'évolution des pays développés, elles nous en rendent plus tributaires. Nous dépendons en effet, en mathématiques, des pédagogues et des manuels occidentaux. Nous n'avons pas assez d'experts ni de fonds pour élaborer nos propres manuels. Ceux-ci sont donc soit entièrement occidentaux, soit de proches adaptations des manuels occidentaux. De même, nous dépendons des experts étrangers pour nos programmes de formation continue des maîtres, et pour les consultations sur les tendances et les innovations récentes.

D'Ambrosio et Nebres posent une question essentielle, dont leurs propres expériences confirment et l'importance : étant donné la nécessité de comprendre en profondeur les problèmes d'une nation en développement, dans quelle mesure les "experts" des pays développés doivent-ils assumer la responsabilité d'adapter leurs idées aux conditions du pays en question ?

Par exemple, dans quelle mesure une spécialiste néerlandaise de la pédagogie des mathématiques, favorable à une approche pédagogique axée sur l'enfant, doit-elle, quand elle travaille en Indonésie, modifier son point de vue et conformer son enseignement à l'approche axée sur le maître, qui prévaut dans ce pays ? Un consultant américain spécialiste de l'enseignement des mathématiques, doit-il, quand il effectue un travail de formation continue dans les écoles du Costa Rica, encourager l'usage des calculatrices alors qu'elles n'y sont pas couramment disponibles ? Même si ce sont des spécialistes de l'enseignement des mathématiques, les consultants comprennent-ils suffisamment les subtilités culturelles et économiques pour s'adapter comme il convient ? Doivent-ils proposer ce qui leur paraît être le meilleur, en partant du principe que les responsables du pays bénéficiaire apporteront les adaptations nécessaires, en fonction des facteurs culturels et des contraintes économiques ?

Cette situation paradoxale où les bénéficiaires du cours de formation continue dans le pays en développement sont plus conscients des besoins locaux que les consultants du pays développé n'est pas sans rappeler la situation décrite ci-dessus, où les instituteurs sont plus conscients des besoins locaux que les enseignants des universités ou des instituts de formation des maîtres. Dans les deux cas, on peut remédier à ce manque d'information an améliorant la communication entre les formateurs et les bénéficiaires de la formation.

Les dispositions suivantes permettent d'améliorer la communication avec les consultants invités :

Information approfondie des consultants sur les facteurs culturels et économiques et les objectifs éducatifs avant leur départ de leur pays d'origine ;

Observation des écoles locales par les consultants dès leur arrivée dans le pays hôte ;

Interaction des consultants invités et des responsables du pays hôte

dans les phases d'élaboration du programme de formation continue ;
Affectation des consultants à des équipes pour accélérer leurs expériences d'apprentissage ;
Possibilité de continuer à prendre l'avis des consultants même après leur retour dans leur pays.

Un des éléments essentiels de leur travail de consultation consiste, pour les consultants étrangers, à présenter les différentes options possibles, en exposant à la fois les avantages et les inconvénients des méthodes nouvelles. Par exemple, un spécialiste de la formation pédagogique axée sur les compétences (Competency Based Teacher Education, CBTE), doit, quand il travaille dans un pays où cette approche est nouvelle et mal connue, développer aussi bien les arguments qui militent contre la CBTE que ceux qui militent en sa faveur. Il doit décrire les autres méthodes possibles. Le consultant doit se rendre compte que les pédagogues du pays hôte ont à faire des choix avisés entre les différentes possibilités car ils en porteront la responsabilité longtemps après que le consultant sera reparti.

Les activités internationales et nationales de formation continue ont aussi en commun la nécessité de considérer surtout les besoins à long terme. Les consultants invités peuvent certes apporter à un pays en développement une aide importante, mais le meilleur moyen pour celui-ci d'atteindre ses objectifs à long terme est de former soigneusement ses propres cadres, quitte à les envoyer faire des études à l'étranger. Un noyau de spécialistes qualifiés de la pédagogie des mathématiques peut, dans un pays, organiser une formation continue qui tienne compte de la culture et de l'économie nationales. Un pays en développement doit se rendre compte que faire appel à des consultants étrangers ou envoyer ses propres spécialistes étudier à l'étranger coûte cher, et qu'il faut donc que ce soit les spécialistes nationaux qui assument en fin de compte l'encadrement de la formation continue.

La question de savoir dans quelle mesure les programmes d'enseignement des pays développés doivent tenir compte des besoins des étudiants des pays en développement se pose à nouveau à propos des études à l'étranger. Selon le Council of Graduate Schools des Etats-Unis d'Amérique (La Bidus, 1980) – qui a examiné la question de la pertinence les programmes de maîtrise universitaire américains aux besoins des étudiants étrangers – "la question générale de savoir si l'on doit modifier les programmes pour tenir compte des intérêts des étudiants étrangers ne peut être résolue qu'en termes spécifiques, et seulement à propos de certaines caractéristiques fondamentales de l'enseignement supérieur américain". Par exemple la structure de le discipline, le type de grade décerné et la personne du conseiller pédagogique ont été donnés comme exemples de facteurs pouvant influencer un programme. En outre, "l'adéquation des études de niveau avancé poursuivies par un étudiant par rapport aux objectifs propres de cet étudiant, dépend de

son aptitude à exprimer lesdits objectifs, de la souplesse des conditions pour l'obtention du diplôme et de la volonté, de la part du conseiller pédagogique, de tenir compte des intérêts particuliers de l'étudiant".

Que les cours de formation continue soient donnés dans le pays en développement ou dans un pays développé, il convient de prendre en considération les différences culturelles et économiques entre les pays. Les problèmes et les questions soulevés par ces différences conduisent aux recommandations suivantes :

Il incombe aux consultants internationaux de se renseigner, avant leur départ, sur le lieu où ils effectueront leur travail de formation continue, sur la culture, les traditions et les pratiques éducatives, l'économie et les objectifs du système scolaire du pays hôte ; pour sa part, l'administration scolaire de ce dernier doit fournir cette information au consultant ;

Une des premières priorités pour le pays hôte et le consultant international est de faire en sorte que ce dernier prenne connaissance de la situation scolaire, y compris les capacités des maîtres, leurs besoins, les outils pédagogiques dont ils disposent et les objectifs éducatifs du système ;

Les consultants internationaux doivent s'efforcer de présenter les différentes options de façon assez détaillée pour permettre aux responsables du pays d'accueil d'effectuer un choix rationnel ;

Les responsabilités des consultants extérieurs ne doivent pas prendre fin au moment de leur départ du pays hôte ; ils doivent continuer à faire fonction de conseillers après leur retour dans leur pays d'origine ;

La conception des programmes de formation continue doit tenir compte de la nécessité, à long terme, pour le système scolaire de pourvoir produire ses propres cadres pour la formation continue ;

Il convient d'organiser des programmes d'études intensives dans des établissements de pointe afin de former ces cadres des pays en développement.

Remarques finales

La formation continue contribue à l'évolution des mathématiques à l'école primaire (Price, 1981) et au perfectionnement professionnel des instituteurs (Otte, 1979). Deux principes fondamentaux ont orienté le choix des recommandations : (a) le programme de formation doit être en rapport étroit avec les mathématiques enseignées ; (b) le programme de formation continue doit favoriser l'initiative locale.

L'étude, dans la section précédente de la façon dont les consultants internationaux doivent agir et des responsabilités qui leur incombent,

a permis d'illustrer l'application de ces deux principes. Le cas extrême du consultant international a, en fait, ceci de remarquable que les processus et les principes qui le concernent s'appliquent également à toute personne extérieure qui intervient dans un cours de formation continue. Le professeur d'une université locale et l'inspecteur de mathématiques au niveau provincial ou national doivent bien connaître la situation scolaire locale pour pouvoir assurer une formation continue efficace. Savoir écouter et réfléchir est la qualité la plus importante du pédagogue de formation continue. Les administrations scolaires doivent rechercher à l'extérieur des idées propres à susciter une initiative locale créatrice.

La formation continue entraîne des dépenses. Cependant, c'est un bon investissement. Enseigner peut devenir démoralisant si le maître se heurte année après année aux mêmes problèmes sans progresser dans leur résolution. La formation continue peut aider les maîtres à surmonter leurs difficultés pédagogiques ; elle contribue par là à leur donner la confiance dont ils ont besoin pour pouvoir communiquer à leurs élèves la joie d'apprendre et pour conserver leur ardeur à enseigner. Investir dans la formation continue constitue un emploi judicieux des ressources, car cela permet à la classe de fonctionner plus efficacement.

La formation continue doit désormais être considérée comme un aspect permanent de la vie professionnelle des maîtres. Leur formation initiale ne peut leur apprendre tout ce qui est utile à l'enseignement des mathématiques. Il en serait ainsi même si ce cycle de formation était consacré exclusivement à l'enseignement des mathématiques et durait six ans. Le progrès des connaissances de la pédagogie des mathématiques et les nouveaux outils mathématiques – la calculatrice et l'ordinateur – impliquent que, dans l'avenir, il incombera de plus en plus au maître de veiller à son perfectionnement permanent. La formation initiale qu'ils reçoivent et l'orientation du système scolaire dans le sens de l'éducation permanente doivent habituer les maîtres à l'idée que la formation continue est appelée à devenir un élément fréquent et normal de leur vie professionnelle. Les maîtres doivent recevoir un salaire qui leur permette d'investir dans leur propre développement professionnel. Ils doivent aussi pouvoir compter sur le système éducatif de leur pays pour leur offrir des possibilités de formation continue bénéficiant de son soutien.

Références

D'AMROSIO, U. 1981. Uniting Reality and Action : A Holistic Approach to Mathematics Education. Dans D. J. Albers et L. A. Steen (dirs. pub.) *Teaching Teachers, Teaching Students.* Cambridge, Mass. Birkhauser.

LABIDUS, J. B. 1980. *The Foreign Student in American Graduate Schools.* Washington, D. C., Coucil of Graduate Schools in the United States.

MEIRING, S. P. 1980. *Problem Solving.* Brochure 1 : *Becoming a Better Problem Solver ;* Brochure 2 : *A Resource for Problem Solving.* Columbus, Ohio, Department of Education.

NATIONAL ADVISORY COMMITTEE ON MATHEMATICAL EDUCATION (NACOME). 1977. *Overview and Analysis of School Mathematics, Grades K-12.* Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics.

. 1980. *An Agenda for Action ; Recommendations for School Mathematics of the 1980's.* Reston Va., NCTM.

NEBRES, B. 1981. Major trends from ICME IV : A Southeast Asian Perspective. Dans : D. G. Albers et L. A. Steen (dirs. pub.). *Teaching Teachers, Teaching Students.* Cambridge, Mass., Birkhauser.

OSBORNE, A. ; BOWLING, J. M. 1977. The Context of In-Service Education. Dans : Osborne, A. (dir. pub.) *An In-Service Handbook for Mathematics Education* Reston, Va., National Council of Teachers of Mathematics.

OTTE, M. 1979. Formation et vie professionnelle du maître de mathématiques. Dans : *Tendances nouvelles de l'enseignement des mathématiques.* Vol. IV, pp. 115–142. Paris, Unesco.

PRICE, J. GAWRONSKI, J. D. (dir. pub.) 1981. *Changing School Mathematics : A Responsive Process.* Reston Va., National Council of Teachers of Mathematics.

SKILBECK, M. ; EVANS, G. ; HARVER, J. 1977. *In-Service Education and Training ' Australian Innovations.* Canberra, Curriculum Development Centre.

Bryn Roberts

Le projet de formation en cours d'emploi des enseignants du Swaziland (1973–1977)

Le compte rendu qu'on lira ci-après du projet de formation en cours d'emploi des enseignants du primaire au Swaziland repose sur l'expérience personnelle de l'auteur, qui a été attaché au projet de 1973 à 1979 comme directeur d'études en mathématiques. Cette période correspond à la première phase du projet, à l'issue de laquelle 600 maîtres non qualifiés ou sous-qualifiés ont reçu leur certificat d'aptitude à l'enseignement primaire.

Ce compte rendu est divisé en trois parties concernant respectivement : la structure du cycle de formation en cours d'emploi, l'élément mathématique de ce cycle, le rôle et la fonction de la formation en cours d'emploi dans les pays en développement.

La structure du cycle de formation en cours d'emploi

Au début des années soixante-dix, à cause de l'accroissement graduel du nombre des écoles primaires, le nombre de maîtres non qualifiés travaillant dans le système éducatif du Swaziland avait atteint un niveau inacceptable. Dans l'ensemble, ces enseignants étaient affectés aux classes des deux ou trois premières années de l'école primaire, ce qui avait souvent pour conséquence automatique que les instituteurs spécialement formés pour ces premières années étaient placés dans des classes d'enfants plus âgés. Pour remédier à cette situation, un projet a été établi d'un commun accord entre l'Unesco et le gouvernement du Swaziland en 1971. Ses objectifs étaient les suivants :

> Renforcer la capacité pédagogique du pays en formant environ 600 instituteurs ; inculquer les méthodes modernes, non seulement dans le cadre de la formation initiale, mais aussi en vue du perfectionnement des maîtres déjà en exercice ; et organiser la formation de telle façon qu'elle perturbe le moins possible les effectifs d'enseignants des écoles (Nsibandze et Green, 1978, p. 100).

Un projet aux objectifs similaires avait été mis en oeuvre cinq ans plus tôt au Botswana. Cette expérience a fourni de précieux enseignements

sur la préparation du personnel de projet et les stratégies de formation en cours d'emploi en milieu scolaire. Ces éléments ont été intégrés au projet du Swaziland, et il a été décidé que l'équipe du projet serait nommée six mois avant la mise en route effective du programme pédagogique, lui laissant ainsi le temps de réunir les informations et d'élaborer les plans nécessaires ; et qu'il faudrait organiser avec soin, comme suivi de la formation donnée, des visites régulières dans les écoles où seraient affectés les stagiaires à leur sortie.

Ce projet, comme son prédécesseur du Botswana, était un projet novateur, associant la formation en institut pédagogique et la formation en milieu scolaire dans le cadre d'un cycle de formation de trois ans qui comprenait : trois stages de six semaines à l'Institut ; trois séries de huit devoirs par correspondance en anglais, pédagogie, mathématiques, sciences et études sociales ; une supervision des maîtres en milieu scolaire et l'apport à ceux-ci d'une aide pédagogique par des directeurs d'études et un programme d'émissions radiodiffusées.

Dès janvier 1973, tout le personnel nécessaire au projet avait été nommé et était installé au William Pitcher College à Manzini où le projet était basé. L'effectif était de quinze personnes, dont le directeur du projet qui avait la responsabilité d'ensemble de l'orientation et de la gestion ; un responsable des études par correspondance, spécialement chargé de la réalisation et de la notation des devoirs par correspondance ; deux directeurs d'études pour chaque matière : anglais, mathématiques, sciences et études sociales ; deux dactylos ; un employé chargé du collationnement et deux chauffeurs.

Les membres de l'équipe voyagèrent d'un bout à l'autre du pays, pour informer les instituteurs et les chefs d'établissement du nouveau programme qui allait être mis en oeuvre. Ils se familiarisèrent ainsi avec le groupe d'instituteurs qu'ils allaient rencontrer et leurs élèves, de même qu'avec la société où ils allaient eux-mêmes s'intégrer. On s'aperçut que les maîtres non qualifiés ou sous-qualifiés étaient très soucieux de s'instruire et d'accroître leurs capacités pédagogiques ; cependant, il semblait y avoir peu de contacts entre enseignants et entre les chefs d'établissements et les personnes responsables de'administration scolaire dans leur district. Il est apparu aussi que, sur le plan de l'éducation formelle ou non formelle, il ne se passait pas grand chose au cours des quatre premières années de la scolarité primaire. Le sentiment général des maîtres et des chefs d'établissement était que les choses ne commençaient à devenir sérieuses qu'au "niveau 3" (cinquième année d'études), où débutait la préparation des enfants au certificat d'études primaires qu'ils passaient à la fin du "niveau 5" (septième année). Il est apparu enfin que les ressources des écoles en mobilier, équipement pédagogique et livres étaient insuffisantes. En outre, les effectifs des classes variaient entre cinq et cinquante élèves suivant l'emplacement et le type de l'école, la norme étant de trent-cinq à quarante par classe.

L'équipe du projet prit aussi des contacts utiles avec les inspecteurs scolaires, les fonctionnaires de l'éducation et l'Unité des programmes de l'enseignement primaire (Primary Curriculum Unit, PCU) récemment constituée au niveau national. Elle accorda une attention particulière aux travaux de cette Unité qui s'employait à recueillir les opinions de personnes situées à différents niveaux de la société swazie sur les buts et les objectifs auxquels, selon elles, devait tendre l'enseignement primaire.

A la suite de ces visites dans les écoles, et après avoir consulté d'autres membres du système éducatif, l'équipe du projet s'accorda, après discussion, sur les stratégies suivantes :

La formation en cours d'emploi s'adresserait spécifiquement aux instituteurs des quatre premières années de l'enseignement primaire, et l'on inciterait les chefs d'établissement à mettre à profit, d'un bout à l'autre du cycle, les connaissances acquises par ces maîtres.

Afin d'initier les maîtres aux méthodes d'interaction efficace avec les jeunes enfants, les cours par correspondance rédigés par les membres de l'équipe mettraient l'accent sur le travail en groupes et l'approche heuristique. Pour le stage de formation à l'institut, on aurait recours, autant que possible, à des méthodes d'enseignement que les stagiaires eux-mêmes pourraient ensuite employer dans leur classe. Il serait fait un emploi intensif de la méthode des "ateliers" avec utilisation de 'feuilles d'exercises' en mathématiques, en sciences, en études sociales et, dans une moindre mesure, en anglais. Les travaux dirigés de "pédagogie" porteraient sur les divers styles et méthodes didactiques, notamment l'enseignement centré sur l'enfant.

L'équipe du projet ouvrirait une école de démonstration et d'application, où les maîtres en stage de formation pourraient observer la méthode du travail en groupe et s'exercer eux-mêmes à la pratique de cette méthode.

Compte tenu des contraintes de transport (deux véhicules pour couvrir tout le pays), les membres de l'équipe n'iraient voir les maîtres dans leur propre école, pour les aider et évaluer leurs performances, que trois fois par an. On s'efforcerait cependant de faire en sorte que la première visite suive d'aussi près que possible le cycle de formation, pour aider avant tout les maîtres dans l'organisation et la conduite de leur classe. Un bulletin d'information et des émissions de radio bi-hebdomadaires permettraient de compléter ces contacts.

On décida que les membres de l'équipe du projet chercheraient à participer aux diverses activités de la PCU du Swaziland et s'intégreraient à des comités si on le leur demandait.

L'élaboration et la formulation de ces stratégies eurent pour effet de transformer les membres de l'équipe en dynamiques "agents de changement" et d'accroître leur ardeur. Le fait de devenir ainsi collectivement

responsables de la réalisation des objectifs du projet, augmenta en outre leur assurance.

L'élément mathématiques du cycle de formation en cours d'emploi

Les recherches effectuées par les deux directeurs d'études de mathématiques amenèrent à adopter, pour la formation en mathématiques, une stratégie multiple :

La formation dispensée à l'Institut pédagogique serait surtout du type atelier, consistant en travaux de groupes avec matériel ou manipulation d'appareils.

Les devoirs par correspondance traiteraient d'abord de notions de gestion et d'organisation de la classe, et aborderaient ensuite certains sujets nouveaux pour les stagiaires (comme les bases de la numération) ainsi que les sujets qu'ils auraient demandé à traiter ou qu'ils sembleraient mal connaître.

L'équipe du projet établirait le plan des cours de mathématiques des quatre premières années de l'école primaire en s'appuyant en partie sur les objectifs formulés par la PCU. Ces cours reposeraient sur une approche heuristique et le travail de groupe et sur l'utilisation d'un ensemble déterminé de matériels pédagogiques, d'équipements ou d'appareils. Chaque participant remporterait dans son école la partie du plan de cours correspondant à sa propre classe.

Les participants remporteraient dans leurs écoles le matériel simple qu'ils auraient fabriqué à l'Institut.

Des actions de formation complémentaires auxquelles les chefs d'établissement seraient invités en même temps que les maîtres en formation seraient organisées localement. Cela permettrait aux chefs d'établissement de voir ce que l'on attendait de leurs instituteurs et les aiderait à déterminer dans quels domaines apporter à ceux-ci un appui professionnel.

Un centre d'équipement et de matériels d'enseignement des mathématiques (et des sciences) subventionné par le Ministère de l'éducation, serait créé au sein du Department de formation continue du William Pitcher College. L'équipement et le matériel seraient vendus à des prix subventionnés, et l'on inciterait les chefs d'établissement à acquérir sur le budget de leur école ce que les maîtres en formation demanderaient pour leur classe.

Les visites dans les écoles seraient considérées comme des occasions d'apporter une aide dans le domaine de l'organisation et de la planification de la classe, d'inciter les maîtres à évaluer les résultats d'un

travail effectué avant la visite et de prévoir l'organisation des futures activités en mathématiques.

Il serait rendu compte, en termes généraux et au cours d'émissions de radio, des observations faites par les directeurs d'études de mathématiques lors de leurs visites dans les écoles.

Les différents éléments de cette stratégie de formation en cours d'emploi en mathématiques devaient être considérés à deux niveaux : le niveau du cycle de formation pédagogique lui-même, et le niveau de la classe où les maîtres en formation étaient appelés à enseigner. Deux grandes questions se posèrent au cours de la mise en oeuvre de cette stratégie : celle du contenu et de sa transmission et celle de l'évaluation, questions que nous étudierons ci-après.

Le contenu mathématique du cycle de formation en cours d'emploi était fondé sur celui du Programme scolaire officiel de l'enseignement primaire. Mais on a pu remarquer que l'accent a été mis sur certains sujets en rapport avec les objectifs de la PCU. Ces sujets étaient au nombre de sept : les figures, les nombres (ensembles), la longueur, la masse, le temps, l'eau (capacité), le magasin (l'argent). Le matériel nécessaire à l'enseignement de ces sujets, dûment étiqueté, était disposé sur des bancs le long de trois côtés de la salle de mathématiques de l'Institut. Dans la partie libre de cette salle se trouvaient cinq tables de travail. Pour une séance de travail, on prenait le matériel nécessaire sur les bancs et on l'apportait sur les tables où travaillaient cinq groupes de stagiaires. Leurs tâches étaient spécifiées par des "feuilles d'exercices" et un "plan de rotation". Chaque rotation de cinq feuilles d'exercices était appelée cycle ou unité' Ce système avait pour but de simuler une situation scolaire de cinq groupes d'enfants travaillant pendant la durée d'une "semaine" scolaire de cinq jours.

Chaque feuille d'exercices donnait des informations et des instructions sur le matériel et les fournitures (papier, craies, etc.) à utiliser dans la phase d'investigation initiale. Il y avait ensuite des questions destinées à approfondir un aspect du sujet et à mener finalement à la "pratique". En général, une série de feuilles d'exercices portant sur un sujet donné couvrait successivement les étapes suivantes :

1. L'utilisation de matériels "concrets".
2. L'utilisation d'un "modèle" (combinasion de matériels "concrets").
3. L'utilisation d'une figure ou d'un diagramme (représentation de l'étape 2).
4. L'utilisation de symboles (chiffres, par exemple).
5. Pratique des étapes 2, 3 et 4.
6. Pratique de l'étape 4.

L'étape 1 mérite une courte explication. Sa nécessité résulte du fait que les maîtres sont généralement déjà familiarisés avec les algorithmes qui peuvent apparaître aux étapes 4 et 5, mais ne les comprennent pas parfaitement. Il était donc nécessaire que les maîtres assimilent l'idée que

la séquence modélisation (étape 2), séance de la représentation (étape 3) et enfin de la symbolisation (étape 4) constitue pour les enfants un outil puissant et satisfaisant pour se familiariser avec les notions mathématiques. En prenant graduellement conscience de l'efficacité de cette séquence en l'expérimentant eux-mêmes sur les algorithmes qu'ils ont appris à l'école primaire, les maîtres se préparaient ainsi à utiliser, le cas échéant, cette méthode dans leur propre classe.

Le matériel nécessaire pour la salle de mathématiques de l'Institut, afin de promouvoir cette nouvelle approche et son implantation dans les écoles primaires, comprenait des articles nombreux et variés dont la plupart sont énumérés ci-dessous, par sujet d'enseignement :

Figures : puzzles, plaques à insertion, modèles solides et plans, plaques à trous, géoplans, pâte à modeler ou argile, matériaux de récupération, ficelle, ciseaux, colle, jeux de "tangram", jeux de mosaïques.

Nombres (et ensembles) : jetons (capsules de bouteilles, graines, perles, allumettes, etc.), réglettes de Cuisenaire, "centicube", blocs de numération décimale (cubiques, allongés, plats, blocks, etc.), blocs logiques, bouliers, balance mathématique, jeux numériques (dominos, etc.).

Longueur : règles graduées et mètres, toise, roue à lanterne, mètres à ruban, ficelle, quadrillage centimétrique.

Masse : masses arbitraires et masses classées, masses métriques, balance à fléau, balance automatique, pèse-personnes, "centicube".

Temps : horloge, cadran d'horloge, chronomètre, minuteur, pendules, piste de roulement, cadran solaire, sablier.

Eau : mesures de capacité arbitraires et classées, mesures métriques, cuillers, tasses, bouteilles, récipients en plastique, bols, cuvettes, seaux.

Magasin : étagères derrière un comptoir sur lequel est placé un tiroir-caisse, paquets vides à "acheter" sur les étagères, étiquettes de prix, balance, monnaie en plastique, en carton ou réelle.

Les maîtres de chaque groupe de formation sont retournés dans leurs écoles avec une liste des matériels nécessaires pour leurs classes, ainsi qu'un plan de travail en mathématiques pour ces classes. Beaucoup de maîtres ont acheté à leurs propres frais le matériel dont ils avaient besoin plutôt que d'attendre que leurs chefs d'établissement décident de les acheter sur les fonds de l'école.

Evaluation

Les objectifs pédagogiques précis des feuilles d'exercices n'étaient pas indiqués. L'accent a été mis sur la pratique elle-même et non sur les raisons qui la motivaient. Les maîtres pouvaient discuter librement de ces raisons au cours de leurs séances de travail en groupe sur la base de ces feuilles. Pendant ces séances, le rôle du directeur d'études en mathé-

matiques consistait à s'asseoir auprès de chaque groupe pendant tout le temps nécessaire pour faciliter ou réorienter les investigations, et pour évaluer l'attitude des maîtres à l'égard de la progression en six étapes. Il était souvent nécessaire, pour répondre à une question des stagiaires, de discuter de la valeur du travail en cours. A ces occasions, le directeur d'études écoutait attentivement ce que le stagiaire avait à dire, notamment, de sa situation pédagogique et de la façon dont la nouvelle méthode pourrait être utilisée dans cette situation.

Pendant les stages à l'Institut, l'accent a été mis sur l'évaluation formative des stagiaires, et en particulier sur leur attitude à l'égard de l'introduction de réformes dans leurs classes. Dans l'ambiance assez libre de la formation mathématique dispensée à l'Institut, une relation de type professionnel a pu s'établir, au lieu de la relation habituelle professeur-étudiant.

L'évaluation cumulative des maîtres en formation s'est faite d'après les résultats des devoirs par correspondance qui leur étaient envoyés dans leurs écoles et qu'ils renvoyaient à l'Institut après avoir répondu aux questions posées. La première série de huit devoirs était conçu pour aider les maîtres en formation à créer, dans leur classe, un environnement favorable à l'apprentissage chez de jeunes enfants. On y insistait sur la nécessité pour les enfants d'utiliser le matériel et sur le fait qu'ils devaient eux-mêmes contribuer à l'ambiance générale de la classe en réalisant des dessins, etc. à afficher aux murs. Les huit premiers devoirs avaient pour thèmes : les figures, les nombres et les ensembles, l'argent, la longueur, la masse, le temps et la classe de mathématiques. Chaque devoir contenait des indications de base sur la manière d'enseigner le sujet et des conseils pour la fabrication et l'achat du matériel nécessaire. Le devoir sur la "classe de mathématiques" traitait de l'organisation et de la conduite générales de la classe. Les deux séries de huit devoirs par correspondance des deux années suivantes portaient sur les sujets pour lesquels les maîtres réclamaient une aide ou bien sur ceux qui, pensait-on, correspondaient à leurs points faibles.

Comme on l'a vu plus haut, on s'est efforcé d'aller voir les maîtres dans leurs écoles aussi tôt que possible après leur premier stage de formation à l'Institut. Cette stratégie donnait au maître l'occasion de présenter son chef d'établissement au directeur d'études, qui pouvait lui exposer les buts du stage et ce qu'on attendait du maître pendant sa formation. Au cours de cette visite initiale, le directeur d'études aidait le maître à agencer la salle de classe et à disposer le mobilier pour le travail par groupes. Les visites suivantes faites pendant la première année de formation servaient à approfondir cette question et à évaluer la qualité du milieu physique d'apprentissage créé dans la classe par le maître. Celles de la deuxième et de la troisième années portaient davantage sur les notions effectivement enseignées et les méthodes employées.

Ce cycle de formation en cours d'emploi en milieu scolaire permettait

d'établir une interaction fructueuse entre le directeur d'études et le maître à partir de questions apparemment simples mais très importantes, comme les suivantes :
Quelles feuilles d'exercices utilisez-vous cette semaine ?
Quelle est la réaction des enfants aux feuilles d'exercices ?
Selon vous, qu'apprennent les enfants ?
Comment pourrait-on améliorer les feuilles d'exercices ?
Quelles fiches de travail utiliserez-vous la semaine prochaine ?
Ces questions fournissaient au directeur d'études et au maître un cadre de réflexion à l'intérieur duquel ils pouvaient discuter d'éléments divers, tels que : les structures mathématiques, la séquence, la progression, les exercices correctifs ou d'enrichissement ; l'organisation et la gestion de la classe ; l'utilisation et la mise en commun des ressources, les besoins en ressources, les relations et le dialogue avec les autres enseignants.

Le rôle et la fonction de la formation en cours d'emploi dans les pays en développement

Pour être efficace, la formation en cours d'emploi doit avoir un double rôle : perfectionnement individuel du maître et, par voie de conséquence, amélioration du système éducatif. A cette fin, il faut que l'expérience profite à l'individu et que le système puisse employer les compétences nouvellement acquises.

Michael Eraut (1972) distingue trois fonctions importantes de la formation en cours d'emploi : apporter des connaissances nouvelles ; faciliter le dialogue professionnel ; innover pour résoudre un problème pédagogique.

Cette troisième fonction, dans le cas du projet du Swaziland, a été assurée en quatre temps ou phases : observation des écoles, identification du ou des problèmes pédagogiques ; mise au point d'une action formative originale pour résoudre le problème, avec incorporation de la première et de la deuxième fonctions d'Eraut ; action visant à permettre au système éducatif d'adopter une approche novatrice pour intégrer les nouvelles compétences acquises par les maîtres.

L'influence de la formation en cours d'emploi doit se faire sentir au niveau des écoles, cette formation doit donc comprendre une composante solidement ancrée en milieu scolaire. Pour cela, il est indispensable que le personnel de la formation continue rencontre les maîtres dans leurs écoles et discutent avec eux des problèmes pédagogiques sur un plan professionnel. Il est vivement souhaitable, pour accroître le sens professionnel et les compétences des maîtres en formation et favoriser l'amélioration du système éducatif, de faire alterner les activités de formation à l'école même et les stages en institut pédagogique.

Le projet du Swaziland a permis d'accroître les compétences de nombreux maîtres et il a contribué à améliorer l'instruction donnée aux enfants. On peut dire que l'élément mathématique du cycle de formation a contribué à stimuler l'intérêt des maîtres, même si son rôle, à cet égard, n'a pas été supérieur à celui de la formation dispensée dans les autres matières. D'une certaine façon, cependant, la formation en mathématiques a été un instrument de changement idéal, car elle a fourni aux maîtres des occasions d'améliorer la conduite et l'organisation de la classe, d'apprendre à utiliser les moyens à leur disposition et de perfectionner leur enseignement, de coopérer avec leurs collègues dans l'application du programme scolaire et d'accroître leurs compétences, contribuant ainsi à l'amélioration globale du système éducatif du Swaziland.

Références

ERAUT, Michael R. 1972. *In-Service Education for Innovation.* Londres, National Council for Educational Technology. (Occasional papers, No. 4).

NSIBANDZE, M. J. ; GREEN, Clifford, 1978. Formation en cours d'emploi des enseignants du Swaziland. *Perspectives : revue trimestrielle de l'éducation* (Unesco), Vol. VIII, No. 1, pp. 119–126.

Maria do Carmo Vila et Reginaldo Naves de Souza Lima

Formation en cours d'emploi des enseignants en exercice non diplômés : étude de cas

La formation à distance des maîtres

Le programme de formation qui est décrit ici a été mis au point dans l'Etat de Minas Gerais, un Etat de l'intérieur de Brésil, qui compte environ quinze millions d'habitants. La capitale, Belo Horizonte, a une population d'environ trois millions d'habitants. On prévoit que ce programme touchera plus de dix mille enseignants.

L'Université fédérale du Minas Gerais (UFMG) est située à Belo Horizonte. Financée par le gouvernement fédéral, c'est le plus grand établissement d'enseignement supérieur de l'Etat. Elle abrite deux centres qui sont en rapport direct avec le programme. Le premier est le Centre pédagogique, école primaire et secondaire géréé par l'UFMG à des fins pédagogiques et utilisée dans ce but comme laboratoire. Le second est le Centre de formation des enseignants de sciences du Minas Gerais (CECIMIG). Il se trouve sur le campus de l'UFMG, mais n'est pas financé par l'Université. Beaucoup de ses spécialistes proviennent cependant de l'UFMG. Le CECIMIG forme des enseignants de sciences et de mathématiques pour tout l'Etat depuis 1965 et il est responsable du fonctionnement du programme de formation des maîtres étudié ici. Les matériels pédagogiques élaborés pour le programme sont d'abord mis à l'essai au Centre pédagogique avant d'être utilisés, s'ils conviennent, dans le cadre du programme de formation.

Le système éducatif brésilien comprend trois degrés : l'enseignement élémentaire et présecondaire (huit ans), l'enseignement secondaire (trois ans) et l'enseignement supérieur ou tertiaire. Le niveau d'études exigé pour pouvoir enseigner dans les quatre premières années du premier degré est celui de l'enseignement secondaire. Au-delà, il est exigé une formation supérieure.

Les problèmes recontrés

Le problème principal auquel se heurte toute tentative de recyclage des maîtres en exercice est celui des effectifs. Dans le seul Etat de Minas

Gerais, les maîtres qui enseignent les mathématiques sont au nombre de 30.000 environ. Or, il n'y a pas plus de trente départements de mathématiques dans les établissements d'enseignement supérieur. Recycler ces maîtres par les moyens traditionnels est, sur le plan logistique, impossible. Une telle tentative serait en outre une forme de suicide économique : il n'y a ni assez de place, ni assez d'argent ni le personnel compétent pour le faire.

Le matériel didactique

Ce programme, divisé en onze phases successives, a démarré en 1977. On aborde actuellement la sixième phase. Dès le départ, le problème principal a consisté à obtenir les ressources financières pour le mener à bien.

En ce qui concerne le matériel didactique, la politique est de limiter au maximum le matériel destiné aux élèves des maîtres qui participent au programme. L'accent a été mis sur les matériels destinés aux maîtres eux-mêmes ; ces matériels portent principalement sur le contenu à enseigner et sur les méthodes d'enseignement à utiliser. Aussi bien les matériels que l'organisation du programme de recyclage s'inspirent, dans une grande mesure, de concepts pédagogiques visant à promouvoir un nouveau type de relations enseignant – élèves, dans l'espoir que l'élève tirera des mathématiques un maximum de profit. Les principes qui guident l'élaboration du matériel sont les suivants :

Considérer la leçon de mathématiques non seulement comme la transmission d'un contenu, mais aussi, et surtout, comme une occasion d'instruire par l'emploi des mathématiques ;

Eviter de transformer, comme on le fait de plus en plus, l'enseignement des mathématiques en séances de préparation à des examens ou à des épreuves de sélection spécifiques ;

Présenter les sujets nouveaux à partir de l'environnement des élèves (ou d'une simulation de cet environnement), et jamais à partir d'un contenu déjà étudié, ce qui rend l'enseignement verbal et l'apprentissage plus difficile. Autrement dit, partir du principe que trop de mathématiques au départ nuit à la compréhension des mathématiques ;

Aborder les sujets nouveaux par les problèmes, et non de façon informative ;

A chaque niveau d'activité, mettre l'accent sur la résolution de problèmes, afin de solliciter continuellement l'imagination des élèves ;

Permettre à l'élève, dès le départ, de créer librement ses propres stratégies de résolution de problèmes et, ce qui est très important, l'y encourager, au lieu de lui fournir des méthodes toutes prêtes, la vie exigeant des individus qu'ils prennent des décisions, résolvent des problèmes et transmettent des connaissances ;

Amener l'élève qui a ainsi créé ses propres stratégies de résolution de problèmes à réfuter ses propres idées et ses propres solutions car, si la vie repose sur le courage d'agir, notre progrès personnel est proportionel à notre capacité de critique ;

Apprendre à l'élève à rechercher des informations sur le sujet étudié en exploitant des sources autres que celles qu'on utilise en classe ;

Aider l'élève à organiser l'information qu'il recueille en classe et à partir d'autres sources, afin qu'il puisse ensuite, et ensuite seulement, la mémoriser.

Afin de traduire ces idées sous une forme tangible, il a été décidé d'élaborer deux grands types de matériel : un matériel destiné exclusivement au maître et un matériel à l'usage de l'enfant mais qui doit, bien sûr, être également familier au maître. Pour les enfants, on a préparé des cartes, des découpages, des feuilles d'exercices et des "plaques". Pour les maîtres, les matériels sont de trois types : didactique, d'enrichissement et psychopédagogique. Le matériel didactique revêt la forme de bandes dessinées. Cette présentation s'est avérée utile pour les enseignants de l'école élémentaire qui ont du mal à suivre les directives d'un texte normal. C'est aussi une technique qui facilite l'initiation aux modèles illustrés et à un dialogue opportun. Les bandes dessinées peuvent être d'une grande utilité pour les maîtres. En simplifiant l'information, le matériel didactique présente au maître les leçons qu'il devra faire, en tenant compte des deux nécessités suivantes :

Nécessité de guider l'enfant de telle sorte qu'il crée lui-même ses propres stratégies (sans pour autant perdre de vue l'assertion de Piaget suivant laquelle la stratégie de l'enfant est extrêmement simplifiée) ;

Nécessité de présenter chacun des sujets, au niveau de l'école élémentaire, sous une forme concrète ; en effet, l'enfant n'est pas, à ce stade, capable d'effectuer des opérations abstraites et ne peut donc raisonner sur des hypothèses.

C'est ainsi que la multiplication, par exemple, n'est pas enseignée à partir de l'addition, ni les puissances à partir de la multiplication. Cela implique que le maître introduise chaque sujet à l'aide d'activités prémathématiques, où l'élève résout des problèmes à sa portée, et en tire ensuite les informations importantes. Le maître est un guide, un orienteur.

Une fois prêt pour l'expérimentation, le matériel a été mis à l'essai au Centre pédagogique. Il a ensuite été revu à la lumière des réactions des élèves et des recommandations des maîtres. Le matériel a ensuite été testé par des groupes de maîtres de diverses régions lors de stages de formation mettant en présence formateurs et stagiaires et faisant appel à la technique dite de l'"enseignement par correspondance en classe". Chaque jour, on remettait à quatre maîtres stagiaires du matériel didactique et du matériel d'apprentissage, qu'ils étudiaient et expérimentaient le lendemain sur leurs collègues, sans intervention extérieure,

pendant que les organisateurs observaient leur travail. Après quoi, chacun faisait part de ses observations sur le travail effectué et le matériel.

Cette simulation d'une formation "à distance" a permis d'améliorer encore le matériel de façon plus économique que si l'évaluation de celui-ci avait fait suite à un cycle de formation réel.

Comme on l'a déjà dit, le programme se décompose en onze phases, dont les objectifs sont respectivement les suivants :

1. Elaborer un matériel pédagogique conçu pour la formation des maîtres, couvrant au total l'enseignement des quatre premières années de la scolarité primaire ;
2. Former un petit nombre de maîtres qui puissent mettre à l'essai, dans quelques écoles communautaires, le matériel élaboré au cours de la phase 1. Des écoles publiques et privées du Minas Gerais ont participé à cette phase du projet ;
3. Revoir le matériel pédagogique expérimenté à la phase 2 et procéder à sa mise au point définitive en vue de la formation à distance des maîtres et de son emploi éventuel dans les classes des quatre premières années du primaire. Des écoles publiques et privées du Minas Gerais ont également participé à cette phase ;
4. Acquérir l'équipement graphique nécessaire pour imprimer les matériels élaborés, expérimentés et revus lors des phases précédentes ;
5. Former des moniteurs (personnel des surintendances de l'éducation de l'Etat du Minas Gerais) par des stages de formation en "présence réelle" organisés à Belo Horizonte (avec emploi de matériels didactiques des classes de la première à la quatrième année) et compléter ces stages par une formation à distance du même personnel ;
6. Former, dans le cadre du programme, dix mille enseignants de mathématiques des classes de la première à la quatrième année. Les tâches prévues pour cette phase sont l'impression du matériel, la publicité à donner au programme de formation, la formation proprement dite et l'information fournie directement par le CECIMIG aux enseignants de mathématiques au moyen de revues, de bulletins ou de matériels nouveaux. Soit dit en passant, c'est pour cette phase du projet qu'un financement est actuellement demandé. Il est encourageant de constater que certaines facultés et universités de l'intérieur de l'Etat du Minas Gerais (ainsi que d'autres Etats) ont déjà commencé à rechercher un financement pour s'associer à ce programme de formation ;
7. Elaborer des matériels didactiques pour les classes de la cinquième à la huitiéme année. A cet égard, on peut dire qu'on a déjà employé au Centre pédagogique de nombreux matériels convenant aux enseignants de ces classes ainsi que d'autres matériels destinés a leurs élèves. Il s'agit maintenant de réorienter l'élaboration des matériels dans la perspective du programme.
8. Former des moniteurs, comme dans la phase 5, pour l'utilisation des

matériels élaborés au cours de la phase 7. En même temps, on assurera la formation continue des enseignants des quatre premières années. En outre, on commencera à élaborer, mettre en oeuvre et revoir les matériels de l'enseignement secondaire ;

9. Former, à distance, les enseignants des classes de la cinquiéme à la huitiéme année, dans le cadre des objectifs du programme. Les étapes prévues sont les mêmes que celles de la phase 6 ;
10. Former des moniteurs à l'emploi du matériel didactique du niveau secondaire, par des stages en "présence réelle", et à distance comme précédemment. Simulanément, on assurera le suivi de la formation des enseignants des huit premières années ;
11. Former, dans le cadre du programme et de ses objectifs, les enseignants de mathématiques du secondaire. Là encore, cela recouvre l'impression du matériel, une action d'information destinée à faire connaître le programme de formation, la formation proprement dite et l'orientation directe des maîtres par le CECIMIG au moyen de revues, de bulletins ou de nouveaux matériels.

Le programme prévoit aussi des travaux dans le domaine de la technologie pédagogique. On commencera par la réalisation de vidéo-cassettes montrant les activités des maîtres et des élèves au Centre pédagogique, quand elles font intervenir les méthodes adoptées par le programme. Ce matériel sera mis à la disposition des surintendances ou des facultés prenant part au programme, où il constituera une source de stimulation et d'information pour les maîtres en formation. On envisage aussi, pour les guider, la production de cassettes sonores contenant des exposés sur l'enseignement, l'apprentissage et l'interaction élèves – enseignant.

A Formiga, ville située à 180 km de Belo Horizonte, la Faculté des sciences et des lettres locale apportera son soutien au programme. La Faculté a déjà désigné des enseignants pour servir de moniteurs. A Belo Horizonte, la municipalité et le Secrétariat à l'éducation de l'Etat fournira des moniteurs en renfort. Dans dix autres surintendances, on a déjà formé trente moniteurs qui apporteront leur concours. Le CECIMIG se chargera en permanence de l'affectation d'enseignants qui seront responsables de la plus grande partie du travail de formation.

Conclusions

Il est important de noter que les maîtres qui suivent cette formation en cours d'emploi doivent acquitter des droits couvrant un minimum de frais de scolarité et le coût du matériel nécessaire. Cependant, ils ont toute liberté dans le choix des unités qu'ils souhaitent étudier et appliquer. Mais au cours des deux premières années, ils ne peuvent en choisir

qu'une par semestre, pour éviter d'être submergés des nouveautés. Pour l'enseignement des sujets qu'ils n'étudient pas dans le cadre de cette formation, ils continuèrent à utiliser les méthodes pédagogiques traditionnelles.

Enfin, l'évaluation ne fait intervenir ni tests ni examens. Formé à un sujet nouveau, le maître applique ce qu'il a appris et renvoie un rapport complet où il rend compte de ses activités et des résultats obtenus, ainsi que de l'opinion de ses élèves et de son chef d'établissement. Il reçoit alors, sur la base de ce rapport, un certificat attestant de son aptitude à enseigner suivant les principes du programme.

Benjamin Eshun, Klaus Galda et Peter Sanders

L'aide des associations d'enseignants et de la radio aux enseignants de mathématiques

Introduction

Dans la plupart des systèmes éducatifs, les instituteurs de l'école primaire occupent, par leur statut comme par leur salaire, un rang inférieur à celui de leurs collègues de l'enseignement secondaire. Pourtant, par bien des aspects, leur travail est plus difficile. Ils ne sont pas spécialisés dans une discipline mais sont censés instruire convenablement leurs élèves dans toutes les matières du programme scolaire ; en outre, les matières évoluent et les instituteurs sont soumis à un bombardement continuel de réformes et de modifications du programme. Leurs conditions de travail sont moins favorables : toute la journée, ils se trouvent en présence du même groupe d'élèves, dont ils doivent s'occuper en permanence, et ils bénéficient rarement de ces heures de liberté qui apportent un peu de détente aux professeurs du secondaire. De plus, ils travaillent souvent dans des locaux exigus ou vétustes, avec des ressources très limitées en livres, en matériel et en auxiliaires pédagogiques. Beaucoup de maîtres ont la charge de groupes d'élèves nombreux, et souvent de niveaux différents.

Alors que les besoins des maîtres du primaire sont plus grands que ceux de leurs collègues du secondaire, il est en général plus difficile de les aider, simplement pour des raisons d'effectifs. Du fait de la structure démographique dans la plupart des pays en développement, il y a en effet plus d'enseignants dans le primaire que dans le secondaire. De plus, comme ils ne sont pas spécialisés, tout soutien mis en place dans une matière donnée s'adresse à l'ensemble des maîtres. Par conséquent, l'organisation d'une action systématique de recyclage ou de perfectionnement est généralement une entreprise de grande envergure. Dans un certain nombre de pays, c'est un institut de formation continue ou un établissement similaire qui est chargé de cette fonction. Nous n'étudierons pas dans ce chapitre les mécanismes de formation continue existant à ce niveau. Il s'agira de solutions moins classiques, mais le problème des effectifs demeure. Par exemple, il est assez simple d'organiser un atelier pour apprendre à vingt professeurs de mathématiques du secondaire à fabriquer des auxiliaires d'enseignement ; mais que faire s'il se

présente 150 instituteurs, qui veulent tous fabriquer un assortiment de base de tels auxiliaires ?

Nous exposerons donc, dans ce chapitre, de façon assez détaillée et à l'aide d'études de cas, deux mécanismes qui permettent de faire face à ce problème d'effectifs et d'apporter une aide aux instituteurs : les associations d'enseignants spécialisées (par matières) et les émissions radiophoniques. Bien sûr, il en existe d'autres comme la télévision ou les réseaux de centres d'assistance pédagogique dûment dotés en personnel. Mais les associations d'enseignants spécialisées et les émissions de radio ont l'avantage de ne nécessiter presque aucun surcroît de matériel ou de personnel par rapport aux ressources déjà disponibles. Ils sont donc bien adaptés aux conditions qui caractérisent actuellement beaucoup de pays en développement.

Les associations d'enseignants de mathématiques

Généralités

Les associations d'enseignants de mathématiques peuvent offrir un cadre institutionnel très utile pour le perfectionnement professionnel des enseignants à tous les niveaux et l'élaboration de programmes d'études au niveau de la pratique pédagogique concrète. En prenant part à ces réunions, en animant des petits groupes de discussion, en organisant des ateliers ou en écrivant des articles qui seront publiés dans le bulletin d'information de l'association, les enseignants peuvent partager leur expérience avec leurs collègues et acquérir les compétences de base nécessaires à l'élaboration des programmes scolaires. Il existe de telles associations dans la plupart des pays. En général, elles tiennent régulièrement des congrès et des ateliers nationaux et régionaux, publient des bulletins d'information et des rapports et organisent souvent la diffusion ou la vente à prix réduits de livres de mathématiques et d'auxiliaires pédagogiques.

Certaines associations de mathématiques ont joué un rôle important dans la révision des programmes scolaires de mathématiques de leur pays. Dans certains cas, elles ont été à l'origine de réformes qui ont été adoptées par la suite au niveau national. Dans d'autres, elles ont élaboré des programmes de mathématiques répondant à des besoins spécifiques, en organisant leurs propres examens. Cependant, les associations de mathématiques ont tendance à s'intéresser surtout aux besoins des enseignants du secondaire. Cela est souvent dû au fait que la plupart de leurs administrateurs et de leurs membres actifs appartiennent eux-mêmes à cette catégorie. Une communication faite au quatrième Congrès international sur l'enseignement mathématique (ICME IV), relative aux deux associations britanniques, la Mathematics Association

(MA) et l'Association of Teachers of Mathematics (ATM), met en évidence ce peu d'attention portée aux instituteurs :

> Un des problèmes auxquels les deux associations britanniques sont confrontées est de savoir comment développer leur action à l'égard des mathématiques de l'enseignement primaire. Quatre-vingts pour cent environ des enseignants de mathématiques de Royaume-Uni ont affaire à des enfants de moins de 11 ans, mais peu d'entre eux peuvent être qualifiés de "spécialistes" et presque tous enseignent l'ensemble des matières du programme. Il est rare qu'un enseignant du premier degré accepte de se consacrer à une matière particulière au point de souhaiter adhérer à une association comme la MA ou l'ATM ; pourtant, le travail qu'ils effectuent est fondamental et ils constituent une composante essentielle du "corps mathématique".
>
> Les deux associations ont essayé d'apporter une assistance aux instituteurs au moyen de publications spéciales, d'articles de revues, parfois de conférences régionales, etc. ; mais c'est la participation, et non l'assitance, qui constitute la raison d'être d'une association professionnelle, et il y a là un problème qui reste à résoudre.

Dans d'autres pays, la situation paraît être semblable. Par exemple, à Fidji, l'aide apportée aux instituteurs par la Fiji Mathematics Association se limite à des réunions occasionnelles, principalement dans les zones rurales. Ces réunions se tiennent habituellement au cours d'un week-end, dans un centre de district et comprennent des tables rondes sur le programme scolaire, les méthodes d'enseignement et l'emploi de certains auxiliaires pédagogiques. Des ateliers sont aussi organisés pour permettre aux participants de confectionner des auxiliaires pédagogiques. Au Congrès national annuel, une ou deux séances de groupe sont consacrées aux besoins des instituteurs, mais les efforts entrepris pour faire adhérer à l'association un nombre appréciable d'instituteurs n'ont généralement pas été couronnés de succès et l'action menée par l'association se situe encore essentiellement au niveau de l'enseignement secondaire.

L'Association de mathématiques du Ghana

La Mathematical Association of Ghana (MAG) est une association professionnelle qui organise des actions intensives et systématiques de formation continue à l'intention des instituteurs du primaire. Fondée en 1962 par une douzaine d'universitaires enseignant les mathématiques et de professeurs de mathématiques du secondaire, la MAG a connu une croissance rapide. En 1977, le nombre des membres actifs dépassait 550, dont plus d'un tiers d'enseignants du premier degré. Les activités de l'association dont les instituteurs peuvent tirer profit sur le plan professionnel sont au nombre de quatre : le congrès national annuel, les congrès régionaux, la préparation d'un certificat d'aptitude à l'enseigne-

ment des mathématiques (Mathematics Teachers Certificate) et le *Journal*.

Le congrès national annuel

Le Congrès national annuel est l'un des événements les plus importants du calendrier de la MAG. En 1977, par exemple, plus de 400 adhérents y ont assisté. Ces dernières années, la MAG a mis sur pied un programme de plus en plus important pour répondre aux besoins et aux intérêts particuliers des instituteurs, à l'intention desquels l'Association invite des universitaires de la Faculté des Sciences de l'éducation de l'Université de Cape Coast, des fonctionnaires des Divisions du programme scolaire et de l'inspection du Service d'éducation du Ghana (GES) et des professeurs des écoles secondaires et des instituts de formation pédagogique à venir donner des conférences. Depuis 1978, le congrès se tient pendant quatre jours au cours des grandes vacances d'août, et comprend des cycles de conférences, des communications, des tables rondes, des séances d'information sur panneaux et des expositions.

Un cycle de conférences est constitué de plusieurs conférences sur un thème donné, concernant soit le contenu soit la méthodologie de l'enseignement des mathématiques. Ces conférences ont pour but d'accroître chez les instituteurs la connaissance et la compréhension des sujets mathématiques qui font partie du programme scolaire ou qui s'y rapportent, ainsi que de les initier aux différentes méthodes et stratégies pédagogiques. Afin de répondre aux divers besoins et intérêts des instituteurs, trois cycles de conférences différents, parfois davantage, sont programmés simultanément. Cela permet aussi de limiter, pour chaque cycle, le nombre des participants à un niveau raisonnable, de manière à favoriser des discussions et des échanges constructifs. Cependent, de nombreux adhérents ont exprimé leur déception de ne pouvoir suivre tous les cycles de conférences.

Les instituteurs tirent de nombreux avantages des communications qui sont faites au Congrès national annuel. Certaines leur permettent d'appréhender, pour la première fois peut-être, la nature des problèmes auxquels l'enseignement des mathématiques se trouve confronté tant sur le plan local qu'au niveau international. D'autres communications traitent de sujets mathématiques d'intérêt général et d'application des mathématiques dans des domaines comme les sciences, les techniques de l'ingénieur, l'industrie, l'art et les affaires. Certaines présentent des jeux, des puzzles et d'autres activités, comme la fabrication de polyèdres intéressants et susceptibles d'être utilisés à l'école pour des travaux extra-mathématiques. D'autres encore portent sur les auxiliaires d'enseignement et d'apprentissage en particulier ceux que les maîtres peuvent confectionner eux-mêmes facilement, et sur les sujets dont ces moyens facilitent la compréhension. Parmi ces exposés, certains sont donnés par des fonctionnaires de haut rang du GES invités au Congrès.

Les tables rondes offrent à l'instituteur l'occasion de connaître les opinions de ses collègues des établissements de niveau supérieur et des fonctionnaires du GES, ainsi que celles d'autres spécialistes, sur des questions d'actualité relatives à l'enseignement des mathématiques ou à d'autres sujets. Les discussions animées et la confrontation des points de vue ont pour effet de convaincre les instituteurs que leur propre opinion sur ces questions d'actualité a son importance et qu'ils ont une contribution à apporter à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

Les séances d'information sur panneaux donnent, à ceux à qui se présente une question ou un problème d'intérêt général concernant un aspect des mathématiques du premier degré, l'occasion d'animer un débat sur ce sujet. Il y a été question en particulier, des modifications de l'agencement et du contenu du programme scolaire. Ces séances constituent aussi une source d'information en retour pour les responsables des Divisions du programme scolaire et de l'inspection du GES en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Enfin, des éditeurs exposent des livres et des matériels d'enseignement des mathématiques destinés aux écoles primaires, ce qui donne aux maîtres qui le désirent l'occasion de commander des ouvrages pour leur usage personnel. Il y a aussi des expositions d'auxiliaires pédagogiques, souvent d'excellente qualité, fabriqués par les maîtres et par les élèves.

Les autres avantages du congrès national sont moins tangibles, mais pourtant très réels. Les instituteurs y ont l'occasion de discuter, sans contrainte, avec leurs collègues d'autres établissements. Ils échangent des idées dans une ambiance de vacances et la plupart d'entre eux repartent enseigner les mathématiques avec une plus grande motivation, en ayant le sentiment d'appartenir à une communauté professionnelle.

Les congrès régionaux

Des sections régionales existent dans chacune des neuf régions du Ghana. Elles organisent des congrès d'une journée, au moins une fois par an, habituellement dans le courant de l'année scolaire.

Les activités des congrès régionaux sont de même nature que celles du congrès national. Les conférenciers et orateurs invités viennent principalement d'institutions de la région. Il est plus facile à un instituteur d'intervenir à ces congrès qu'au congrès national, notamment comme participant à une table ronde. En outre, le nombre des adhérents qui y assistent est généralement plus élevé que l'effectif de la représentation régionale au congrès national.

Les congrès régionaux peuvent aussi attirer des adhérents potentiels grâce aux prix qu'ils décernent aux lauréats des concours de jeux mathématiques organisés à l'intention des écoliers. Outre les trois premiers prix, il est décerné plusieurs prix de consolation et un certain nombre de maîtres assistent au congrès surtout pour y accompagner ceux de

leurs élèves qui ont été récompensés.

Le certificat d'aptitude à l'enseignement des mathématiques dans le primaire

En 1973, le Comité des projets de la MAG a proposé d'organiser des cours de vacances intensifs et systématiques pour les instituteurs du primaire. Ces cours devaient aboutir, après un examen final, à l'attribution du Certificat d'aptitude à l'enseignement des mathématiques (du primaire).

Le but était d'offrir aux maîtres une possibilité de promotion personnelle par l'étude du contenu et de la méthodologie des mathématiques. Le contenu comprenait les ensembles, les nombres, les relations, les fonctions, l'algèbre, la géométrie, les vecteurs, les probabilités et la statistique. Quant à la méthodologie, elle concernait l'étude des programmes du premier degré, l'apprentissage des concepts mathématiques, les méthodes d'enseignement de sujets particuliers, la résolution de problèmes et l'évaluation.

Entre décembre 1973 et août 1978, sept cours de vacances, d'une durée d'au moins deux semaines chacun ont été organisés au total. Plus de vingt maîtres ont suivi les cours jusqu'au bout. Malheureusement, les démarches de la MAG visant à faire délivrer le certificat par le GES ou l'Université de Cape Coast n'ont pas abouti et l'examen final n'a donc jamais en lieu.

Depuis, grâce à une réforme de la politique de formation continue, il a été mis en place des moyens de promotion plus attrayants que le certificat d'aptitude à l'enseignement des mathématiques. On a donc, pour le moment, arrêté ces cours.

Le "Journal" et le bulletin d'information

Le *Journal of the Mathematical Association of Ghana* fournit aux instituteurs un autre moyen d'améliorer leurs connaissances des mathématiques et de la pédagogie des mathématiques. Cependant, la rareté des articles consacrés par cette revue à l'enseignement du premier degré en restreint l'utilité.

La *Newsletter* de la MAG est un bulletin institué à l'origine, en 1978, pour informer les adhérents des activités organisées au niveau national ou régional. La *Newsletter* contient un court article d'intérêt général et des résumés de certaines des communications et des contributions aux tables rondes des congrès.

Conclusion

Nous avons vu qu'à cause de la structure de la profession enseignante les associations spécialisées (par matières) éprouvent des difficultés à

apporter une aide appréciable aux maîtres du primaire. Un certain nombre de pays ont montré ce qu'il est possible de faire au moyen de cours, de congrès et de publications. Il y a là de précieux enseignements pour les associations qui envisagent de telles actions. L'analyse du programme de formation de type classique tenté au Ghana avec de très bonnes intentions, mais qui a finalement échoué, conduit à penser qu'un système de réunions et d'ateliers plus libres, constitue peut-être, si les ressources matérielles et humaines le permettent, une solution plus réaliste à proposer aux enseignants du premier degré.

La radio

Généralités

La présente section traite du rôle de la radio dans l'enseignement des mathématiques et de sa relation avec le maître au niveau de la classe. Bien que la diffusion d'émissions radiophoniques éducatives ait un long passé, puisqu'elle remonte aux années 20, la dernière décennie a vu une extension massive de leur utilisation. Ce potentiel n'est probablement appelé à être pleinement exploité que dans les pays en développement ; dans les pays plus riches, il existe trop de technologies concurrentes et aisément accessibles, comme la télévision et les ordinateurs.

Un certain nombre de gouvernements, ainsi que les principaux organismes internationaux de financement du développement, ont commencé à s'intéresser plus sérieusement au rôle que peut jouer la radio comme moyen de résoudre les problèmes en matière d'éducation aussi bien dans le cadre du système scolaire que pour l'éducation non formelle. Elle peut aider à résoudre deux problèmes majeurs auxquels se heurtent presque tous les pays en développement : le manque de manuels (ainsi que d'autres matériels pédagogiques) et la pénurie d'enseignants qualifiés.

Les avantages principaux de la radio sont évidents, et très importants pour les pays en développement. On peut citer en particulier son faible coût et le fait qu'elle soit universellement répandue. C'est un moyen de communication efficace pour les auditoires illettrés ou semi-illettrés et dans les situations où la tradition orale prédomine. Du point de vue de l'enseignant, il est facile de modifier les émissions, qui n'exigent pas nécessairement la distribution aux élèves de documents d'accompagnement.

Les principaux inconvénients de l'emploi de la radio dans l'enseignement sont encore plus évidents. Dans l'enseignement de type classique traditionnel (occidental), le soutien apporté par les stimuli visuels est quasiment indispensable. Cependant, ces dernières années, la recherche a montré que des émissions bien conçues et, éventuellement, l'adjonction de quelques documents imprimés ou l'emploi du tableau

noir, permettent de surmonter cet inconvénient. Un autre inconvénient est le fait que la radio est essentiellement un moyen de communication à sens unique.

C'est là un problème qu'on ne peut éliminer complètement mais on peut le réduire en restreignant l'usage de la radio aux composantes du processus éducatif où la communication dans les deux sens n'est pas indispensable, ou en présentant l'émission sous la forme d'un dialogue entre la radio et les élèves, de manière que les élèves la perçoivent comme un échange.

Les différents types de programmes radiophoniques dans l'enseignement des mathématiques

Un programme radiophonique d'enseignement des mathématiques peut prendre beaucoup de formes différentes, le soutien qu'il apporte au maître variant en conséquence. Le programme minimal a une fonction d'enrichissement. Les émissions de cette catégorie durent généralement 15 minutes et sont diffusées une ou deux fois par semaine. Leur principal but est, habituellement, de motiver les élèves. Elles peuvent porter sur des aspects historiques ou culturels des mathématiques ou, éventuellement, présenter aux élèves des jeux mathématiques. Le plus souvent, ces émissions peuvent être suivies soit en classe soit à la maison. L'avantage de la radio, pour ce type de programme, est qu'elle permet d'utiliser de nombreuses ressources (musique, concours d'acteurs professionnels, etc.) auxquelles les instituteurs n'ont pas accès en temps normal. Bien que ces programmes d'enrichissement visent aussi, généralement, à instruire, leur but est avant tout de présenter les mathématiques sous une forme attrayante, pour aider les élèves à surmonter l'aversion et la résistance que cette matière a toujours suscitées chez certains. Un bon programme d'enrichissement peut être un atout précieux pour les maîtres qui, souvent, n'arrivent pas à soutenir l'intérêt de leurs élèves. On a appliqué ce type de programmes, avec plus ou moins de succès, dans beaucoup de pays différents.

Il existe un type de programmes intermédiaire, consistant en une courte série d'émissions, conçue habituellement pour l'enseignement d'un sujet particulier. Il s'agit le plus souvent d'un sujet nouveau, ou particulièrement difficile pour les maîtres. Ce type de programme peut, en même temps qu'il remplit sa fonction didactique auprès des élèves, constituer un bref cours de formation pour le maître et lui offrir un modèle de la manière d'enseigner le sujet. On peut avoir recours à ce type d'émissions chaque fois que des éléments nouveaux sont ajoutés au programme scolaire, ou quand l'observation a montré que beaucoup de maîtres enseignaient mal tel ou tel sujet.

Le projet d'enseignement radiophonique des mathématiques au Nicaragua (RMP)

La suite de la présente section est consacrée à un troisième type de programme, celui dans lequel la radio sert de support essentiel pour enseigner l'ensemble du programme scolaire de mathématiques. A première vue, une telle entreprise peut paraître invraisemblable. Pourtant, s'il est vrai que certains éléments des mathématiques (la géométrie, la mesure, etc.) se prêtent mal à l'enseignement par radio, on est surpris de constater tout ce qu'il est possible de faire avec ce moyen apparemment limité. Dans certains domaines, comme le calcul mental, c'est probablement la meilleure méthode. Dans la plupart des cas, bien sûr, la radio n'est pas réellement le seul moyen employé. Il s'y ajoute l'aide du maître, le tableau noir, des documents imprimés et le cahier de l'élève. Nous prendrons comme exemple le Radio Mathematics Project (RMP) mis en oeuvre au Nicaragua, en décrivant brièvement le projet, puis en étudiant ses effets pour les instituteurs du primaire.

Le RMP a été financé par la United States Agency for International Development (USAID) et le Ministère de l'éducation du Nicaragua, et mis en oeuvre avec le concours technique de l'Institut d'études mathématiques en sciences sociales de l'Université de Stanford. Des séries complètes de programmes radiophoniques d'enseignement des mathématiques du niveau des quatre premières années de l'école primaire et de livres du maître correspondants ont été élaborées entre 1974 et 1978. Bien que ces programmes aient été conçus spécialement pour le Nicaragua, leur structure permet de les adapter à d'autres pays, étant donné la similarité des programmes de mathématiques de l'école primaire dans la plupart des pays. On a, d'une manière générale, suivi le programme scolaire officiel du Nicaragua, mais des modifications ont été apportées chaque fois que les éléments du programme parassaient inadéquats. En ce qui concerne les contenus enseignés, l'accent est mis sur les techniques mathématiques traditionnelles, avec peu de mathématiques "modernes", mais on a exploité les résultats des recherches récentes sur les méthodes d'enseignement. Ces programmes sont surtout destinés aux zones rurales des pays en développement car c'est là que la pénurie de maîtres qualifiés semble la plus grande. Les tests de connaissances montrent que les élèves nicaraguayens des classes d'enseignement par radio obtiennent de bien meilleurs résultats que ceux des classes traditionnelles, en particulier dans les zones reculées. Des données relatives à la Thaïlande confirment ces constatations, on s'emploie actuellement à adapter les programmes du RMP à plusieurs pays.

Les programmes du RMP se présentent comme des dialogues entre le maître à la radio et les enfants dans la classe et ils cherchent à obtenir de fréquentes réponses des enfants. En réglant soigneusement le rythme,

on peut donner aux enfants l'impression que le maître à la radio les écoute. Les réponses des enfants se font à la cadence de quatre à cinq par minute. Elle peuvent être orales (collectives), écrites (individuelles) ou physiques (jeux et matériels concrets). Les enfants apprécient ces programmes, à cause du rôle actif qu'ils y jouent et des nombreux divertissements, comme les chansons, les jeux et les énigmes. La diversité des éléments constitue un trait important de chaque émission. Une même leçon traite généralement de plusieurs sujets, grâce à la méthode de l'"apprentissage distribué" : au lieu d'enseigner les sujets d'une traite, on les étale sur l'ensemble de l'année. Pour tenir compte de la fréquentation irrégulière dans les écoles rurales, la séquence didactique est très répétitive. Cependant, les éléments répétés sont similaires plutôt qu'identiques. On trouvera dans Friend et al. (1980) un exposé complet des méthodes et des programmes du RMP.

Chaque leçon quotidienne est constituée d'une émission de radio, d'une durée de 25 minutes environ, et d'une séquence d'"exploitation" de 15 minutes assurée par l'instituteur, qui peut utiliser à cette fin le livre du maître fourni par le RMP. Ce sont les émissions qui apportent l'essentiel de la partie didactique. La séquence d'exploitation sert principalement, d'une part à enseigner certains sujets comme la géométrie, qui sont difficiles à enseigner par la radio, et, de l'autre, à renforcer les exercices pratiques dans d'autres domaines. Les émissions couvrent l'ensemble du programme scolaire. Les manuels ne sont pas nécessaires. Etant donné les dépenses et les difficultés pratiques qu'impliquerait une vaste action de formation spécialisée des maîtres, les émissions sont conçues de manière à n'exiger qu'un minimum de préparation : une seule séance de trois heures suffit.

La présentation des émissions du RMP varie suivant l'année d'études ; il en est donc de même du rôle du maître. En première année, le maître distribue à chaque élève une feuille d'exercices, dont il surveille l'utilisation au cours de l'émission, et pendant la séquence d'exploitation. Tout au long de l'émission, le maître s'attache à aider les élèves individuellement, en revanches pendant la séquence d'exploitation, les feuilles d'exercices sont utilisées pratiquement comme dans un cours traditionnel.

En deuxième année, il n'est pas fait usage de feuilles d'exercices. Le maître écrit le contenu de la leçon (figurant dans le livre du maître) au tableau avant le début de l'émission. Les élèves en copient une partie sur leur cahier ; une autre partie servira aux activités de groupe. Pendant l'émission, le rôle du maître est semblable à ce qu'il est en première année, à cette différence près que l'attention est centrée sur le tableau et les cahiers des élèves.

En troisième et quatrième années, le rôle du maître est très différent. Pendant l'émission, les élèves écrivent sur leur cahier les problèmes que dicte l'enseignant à la radio. La séquence d'exploitation est stricte-

ment supplémentaire et l'on peut aisément suivre les émissions sans participer à cette séquence. Ce système tient compte du fait que, dans beaucoup d'écoles primaires rurales, le maître a des élèves de plusieurs classes à la fois. Les émissions lui permettent donc de travailler avec les enfants d'une classe différente, si nécessaire. Si tous ses élèves sont de la même classe, les émissions lui donnent la possibilité de les suivre individuellement.

Le rôle du maître

De toute évidence, le RMP assigne au maître un rôle assez différent de celui qu'il joue en temps normal. Le maître continue à remplir toutes les fonctions de direction de la classe, d'entretien des matériels, de discipline, d'administration et d'évaluation des élèves qui lui incombent habituellement, mais il dispose de temps pour aider les élèves individuellement et son rôle se rapproche de celui d'un "tuteur". Il peut observer individuellement le travail de chaque élève et aider au moment où ils en ont besoin ceux qui éprouvent des difficultés. Si les élèves sont nombreux à avoir du mal à comprendre une question, le maître peut y remédier après l'émission.

Evaluation du RMP

On attend du RMP, comme de tout programme radiophonique bien conçu, qu'il serve de modèle de bonne pratique pédagogique, et c'est bien ce qui se passe. Il ressort de témoignages anecdotiques en provenance du Nicaragua que le RMP a aussi eu pour effet d'améliorer les méthodes d'enseignement dans d'autres matières. Certains maîtres disent aussi que les émissions les ont aidés à apprendre les mathématiques en même temps que leurs élèves. En général, l'analyse des questionnaires adressés aux maîtres, au Nicaragua et en Thaïlande, ainsi que les commentaires de nombreux observateurs, montrent qu'une écrasante majorité des instituteurs accueille favorablement ces émissions radiophoniques consacrées à l'enseignement des mathématiques.

Résumé

Nous avons examiné, dans ce chapitre, certains des problèmes auxquels les instituteurs sont confrontés, en particulier ceux des pays en développement. Ces derniers sont souvent sous-qualifiés et surchargés de travail ; leurs écoles sont mal équipées et leurs classes ont des effectifs pléthoriques. Le manque de ressources interdit l'organisation d'une véritable formation en cours d'emploi. Nous avons exposé deux stratégies assez différentes, qui visent à les aider et prennent en considération leurs

difficultés. De nombreux projets officiels ont été mis sur pied pour assurer le recyclage et le perfectionnement des instituteurs mais ces efforts demandent à être complétés par l'action d'organismes non officiels. Les associations d'enseignants spécialisées (par matières) peuvent, par leurs réunions, leurs congrès et leurs publications, contribuer à accroître la compétence professionnelle et l'autonomie des maîtres. La radio peut leur donner accès à des ressources nouvelles et aussi, accessoirement, servir à améliorer leurs connaissances mathématiques et leurs méthodes d'enseignement. Ce sont là deux mécanismes très efficaces, qui méritent de voir leur valeur plus largement reconnue et de recevoir un appui.

Référence

FRIEND, J. ; SEARLE, B. ; SUPPES, P. (dirs.pub.). 1980. *Radio Mathematics in Nicaragua.* Stanford, Calif., Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University.

P. K. Srinivasan

Comment entretenir un climat favorable : les clubs de mathématiques

Introduction

Par rapport aux clubs de sciences, les clubs de mathématiques font encore figure de nouveauté dans les écoles et dans les instituts de formation pédagogique. Ces clubs peuvent stimuler l'apprentissage des mathématiques, en le rendant plus amusant et moins anxiogène, donner aux élèves le goût du raisonnement mathématique, contribuer à révéler le talent des élèves doués et être un moyen d'information des parents et du grand public, propre à susciter leur soutien (Mmari, 1980) mais ce potentiel n'est pas encore pleinement exploité.

Quand ils existent, les clubs de mathématiques sont en général implantés dans les établissements d'enseignement supérieur de premier cycle, où les mathématiques constituent une matière principale. Certaines écoles secondaires ont aussi un club de mathématiques, en particulier celles dont le personnel compte des enseignants de mathématiques enthousiastes et dévoués. Mais on trouve rarement ces clubs dans les instituts de formation pédagogique ou dans les écoles primaires. Etant donné l'importance et l'influence grandissantes des mathématiques dans le monde actuel, il est urgent d'encourager leur développement dans ces deux dernières catégories d'établissements, surtout dans les pays en développement d'Afrique, d'Asie et d'Amérique latine. Dans les instituts de formation pédagogique où de tels clubs existent, leur influence sur les étudiants, les professeurs et la communauté est considérable. Ces clubs ont même inspiré à certains étudiants l'idée d'organiser, dans le cadre de leur stage pédagogique, un club de mathématiques pour leurs élèves ou de les faire participer à des expositions mathématiques. En animant un club de mathématiques, un maître motivé et dévoué peut même arriver à combler l'écart entre le programme scolaire dont l'enseignement est prévu et celui qui est effectivement enseigné. Il peut ainsi étendre le contrôle des connaissances à des travaux pratiques de mathématiques semblables aux travaux pratiques qui existent depuis longtemps en sciences.

Organisation

Dans un institut de formation pédagogique, l'organisation d'un club de mathématiques doit être telle qu'il puisse compter parmi ses adhérents à la fois des membres ordinaires (des étudiants qui ont choisi les mathématiques parmi leurs matières d'étude) et des membres associés (ne suivant pas de cours de mathématiques).

La gestion du club doit être confiée à un comité directeur élu parmi les membres, comprenant par exemple un président, un vice-président, un secrétaire général, un administrateur financier, un trésorier, un chargé des relations sociales et un chargé de publicité. Le club doit avoir des statuts écrits. Ceux-ci peuvent prévoir la cooptation d'autres membres à des postes de responsabilité, par exemple pour assurer la publication d'une revue ou d'un bulletin, ou le fonctionnement d'un tableau d'information, l'exposition de travaux dans une vitrine, etc. Les postes de président, d'administrateur financier et de chargé des relations sociales sont normalement attribués à des étudiants de dernière année. Les autres postes doivent aller à des étudiants plus jeunes, de façon à assurer la stabilité et la continuité du club ainsi qu'une représentation équitable des membres.

Dans une école primaire, l'organisation du club peut être moins élaborée. Il suffit sans doute d'élire ou de désigner, pour gérer le club, trois responsables : un président, un secrétaire et un trésorier, par exemple.

Il est, bien sûr, recommandé d'affecter au club de mathématiques un ou plusieurs enseignants pour guider et superviser les activités et assurer une bonne gestion des fonds provenant éventuellement des cotisations des membres ou de dons des étudiants.

Le nom d'un club fait beaucoup pour son prestige et sa popularité. Il est donc recommandé de lui donner le nom d'un mathématicien célèbre comme Newton, Gauss, Euler, etc., ce qui rappellera aux étudiants la contribution apportée par ces créateurs à la construction de l'édifice mathématique.

Programmes et activités

Un club de mathématiques, s'il veut contribuer à modifier l'état d'esprit des étudiants ou des élèves et à mettre au jour et entretenir le talent de ceux qui sont particulièrement doués, doit prévoir dans ses statuts un programme annuel d'activités bien conçu. Ce programme peut comprendre des réunions périodiques, la publication de bulletins hebdomadaires, l'organisation d'une semaine des mathématiques comprenant des activités diverses : table ronde d'étudiants, jeu-concours, atelier de "modèles à fabriquer et à emporter", activités d'étude, exposition de mathématiques

récréative, des divertissements costumés pour illustrer l'oeuvre de grands mathématiciens ou célébrer leurs anniversaires, des excursions, une kermesse de mathématiques, un concours de pédagogie des mathématiques, quelques activités de recherche de portée limitée et des séances de brassage d'idées pour la résolution de problèmes sortant de l'ordinaire. L'objectif est de susciter une participation maximum des membres du club (Srinivasan, 1981).

Il existe aussi d'autres activités intéressantes et très utiles, de portée plus ambitieuse. Par exemple, un certain nombre d'établissements peuvent convenir d'unir leurs efforts et leurs ressources pour organiser ensemble une exposition-concours ou une kermesse de mathématiques, sélective et tournante, ouverte au grand public. "Sélective" signifie que l'on choisit les notions mathématiques qui seront traitées de telle sorte que la totalité du programme scolaire soit couverte en quelques années, sans qu'il y ait de répétition. "Tournante" signifie que l'explosition "tourne" d'un établissement à l'autre, un établissement donné servant de "relais". Un certain nombre de week-ends consécutifs sont réservés à cette activité, de manière à ne pas perturber le travail habituel, à réduire la charge que représenterait le séjour de l'exposition pendant plusieurs jours de suite dans le même établissement, de tenir le public en haleine, d'améliorer la qualité de l'exposition en tenant compte des critiques et des commentaires du public ou des spécialistes et de permettre la participation de nombreux étudiants. Ce genre d'activité peut d'ailleurs promouvoir la création de clubs de mathématiques, même dans des établissements qui ne sont pas directement intéressés, et servir également de moyen d'éducation des adultes. Une autre activité conçue pour répondre aux besoins des étudiants intéressés par les mathématiques et qui cherchent à étendre le champ de leurs connaissances est la présentation de travaux personnels sur un sujet ne faisant pas partie du programme scolaire, dans le cadre d'un "cours-exposition". Ce cours peut être complété par une épreuve de contrôle des connaissances, avec attribution de prix et de certificats.

Alors que les examens, à notre époque d'éducation de masse, tendent à un "nivellement par le bas" des connaissances acquises, ces manifestations peuvent opérer un "nivellement par le haut" en favorisant une saine émulation et le goût de la difficulté et de l'engagement.

Les écoles primaires

Un club de mathématiques peut avoir un effet positif considérable sur les activités d'une école primaire. Certes, les instituteurs ne sont pas des spécialistes des mathématiques ; mais l'attitude des enfants à l'égard des mathématiques est, en grande partie, déterminée par leur scolarité primaire. Ceux qui n'ont jamais connu l'enthousiasme et le plaisir qui de-

vraient caractériser l'apprentissage des mathématiques ont tendance à adopter une attitude négative à l'égard de cette discipline et à en abandonner l'étude à la première occasion. Un club de mathématiques peut aider les enfants à prendre confiance en eux-mêmes et contribuer à l'épanouissement de leurs dons et de leur goût pour les mathématiques.

La difficulté consiste à trouver un instituteur assez sûr de lui pour organiser un club de mathématiques à l'intention des enfants. Pourtant, bien guidé, et avec le soutien de l'administration scolaire, un instituteur peut réussir une telle entreprise. Pour la plupart des instituteurs du primaire, des conseils et un soutien de leurs supérieurs sont indispensables pour compenser des bases insuffisantes et leurs lacunes éventuelles en mathématiques. Le soutien peu aussi venir du club de mathématiques d'un institut de formation pédagogique, qui peut servir de centre de conseil pour les clubs de mathématiques des écoles primaires du voisinage et de banque de plans de leçons et d'auxiliaires pédagogiques, répondant ainsi aux besoins des maîtres aussi bien en exercice qu'en cours de formation.

L'expérience montre que le programme d'activités du club de mathématiques d'une école primaire peut inclure de nombreux exercices, dont nous ne citerons ici que quelques-uns :

Invention de "récits" correspondant à un énoncé numérique donné ;

Invention de "récits" correspondant à une relation mathématique (cette relation peut être une équation ou une inégalité) ;

Composition de nombres sur un treillis de points formant des figures géométriques comme le rectangle, le carré ou des combinaisons de ces figures ;

Fabrication d'énoncés mathématiques au moyen de bandes rectangulaires, placées bout à bout, comportant l'indication partielle ou complète d'une mesure ;

Découverte de configurations numériques et de configurations géométriques à partir de formules, ou par prolongement d'une suite ;

Jeux du type "pense à un nombre" ;

Création d'expressions algébriques à partir de structures verbales ;

Généralisations et extensions simples ;

Enoncé de définitions appropriées ;

Raisonnement à partir d'axiomes et utilisation de contre-exemples pour réfuter un énoncé ;

Construction de carrés magiques, de triangles magiques, de croix magiques, d'hexagones magiques et de cercles magiques ;

Utilisation de graphes comme modèles d'un phénomène et interprétation de graphes pour la prévision d'un phénomène ;

Abstraction à partir de situations ayant une structure mathématique commune mais qui paraissent différentes ;

Exposés de démonstration sur des éléments particuliers du programme de mathématiques ;

Mathématiques sans tableau noir ;
Séances de résolution de problèmes simples, choisis pour leur intérêt mais adaptés aux connaissances et aux capacités des enfants ;
Mathématiques du milieu : le calendrier, l'horloge, le carrelage, les motifs des tissus, les tresses, les noeuds, le plan de table, les séries, le transport des marchandises, le travail du tailleur.
"Perles", erreurs de raisonnement et paradoxes trouvés principalement dans les réponses données par les élèves de l'école primaire.

Le club de mathématiques d'un institut de formation pédagogique peut aider les instituteurs à introduire ces activités dans leur école en organisant des visites d'élèves-maîtres. Il peut aussi organiser de temps en temps des kermesses ou des concours de mathématiques entre écoles primaires. Ces concours peuvent stimuler l'intérêt pour les techniques "nouvelles" et le désir de s'initier à ces techniques. Par exemple, les auxiliaires pédagogiques ne sont pas encore jugés indispensables par les enseignants de mathématiques et leur emploi n'est donc pas aussi répandu qu'il devrait l'être. En organisant à l'intention des instituteurs des concours de bricolage en liaison avec l'enseignement des mathématiques, on encourage chez eux l'emploi de matériaux de récupération comme les récipients vides, le papier, les cartons, les capsules de bouteilles, les manches à balai, les feuilles quadrillées, etc. pour la fabrication de matériels didactiques improvisés. Ces concours pour instituteurs peuvent aussi porter sur l'ingénoisité déployée dans la façon de traiter un sujet donné, ou sur l'adaptation, à une petite classe, d'un sujet relevant du programme d'une classe supérieure.

Le club peut envoyer régulièrement son bulletin aux écoles et les réactions obtenues l'aideront à l'améliorer. Il peut afficher sur un tableau d'information un questionnaire de mathématiques, avec une "boîte à découvertes" pour recueillir les réponses des élèves ; ce peut être là un moyen de détecter et de cultiver le talent mathématique chez les élèves de l'école primaire.

Mise en garde

Le club de mathématiques ne doit pas dégénérer en un centre de préparation aux examens ou de cours spéciaux. Le conseiller chargé de guider les activités du club doit faire tout ce qu'il peut pour donner aux participants l'occasion de prendre plaisir aux mathématiques. Le club doit avoir pour principe de favoriser chez ses membres l'autonomie et la confiance en soi, afin de faciliter leurs progrès en mathématiques. Il faut éviter une prise en charge personnelle et faire sentir aux membres du club qu'ils sont libres de commettre des erreurs – erreurs qui seront instructives. On doit aussi éviter de considérer le club comme un simple lieu où inviter de temps à autre des personnalités à venir donner une

conférence. Un club qui n'organise pas et n'assure pas une large participation de ses membres n'a guère de raison d'être.

Le soutien

Les services d'inspection doivent avoir conscience de l'importance des clubs de mathématiques. Ils doivent tenir à jour un annuaire de ces clubs et collecter leurs rapports d'activité. Quand ils visitent les écoles et les instituts de leur circonscription, les inspecteurs doivent prendre soin de noter l'existence et les activités des clubs de mathématiques rattachés à ces établissements.

Chaque école ou institut peut tenir un registre des personnes intéressées, parmi les professeurs, chargés de cours, ingénieurs, chercheurs, médecins, etc. des environs ou des établissements d'enseignement supérieur voisins.

Il faut aussi que les écoles et les instituts de formation pédagogique puissent compter sur les conseils et le soutien de l'association nationale de mathématiques de leur pays.

Références

MMARI, G. P. V. 1980. Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en République-Unie de Tanzanie. Dans : R. Morris (dir. pub.) *Etudes sur l'enseignement des mathématiques,* Vol. 1, pp. 76–100, Paris, Unesco.

SRINIVASAN, P. K. 1981. *Why a Maths Club ?* Madras, Blackie & Son (Inde) Ltd.

Guy Brousseau

Rôle d'un IREM dans l'aide aux professeurs de l'enseignement élémentaire

Introduction

Les connaissances mathématiques apparaissaient, à la fin des années soixante, comme un algorithme privilégié des sciences et des techniques. Mais leur diffusion insuffisante semblait dresser un obstacle important pour la communication entre la cité scientifique et le reste de l'humanité, certains y voyant même un instrument de ségrégation intellectuelle ou tout au moins un handicap serieux pour le développement de certains pays. Il fallait propager ces connaissances, les rendre plus accessibles au grand public, améliorer les attitudes que la société avait vis-à-vis des mathématiques de façon à favoriser le développement scientifique, à mieux en faire partager la responsabilité, et à le rendre plus humain en même temps que plus efficace. Pour réduire les distances entre la forme sous laquelle les connaissances mathématiques se manifestent dans la culture commune et celles où elles sont produites dans le monde scientifique, il fallait donc enseigner leur présentation moderne. Telles furent les raisons invoquées pour donner aux mathématiciens les moyens de déterminer les mises à jour nécessaires afin d'améliorer et d'harmoniser l'enseignement de leur discipline et d'exercer sur lui une sorte de "vigilance épistémologique".

La création en France (à partir de 1969) des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) répondait clairement à ces intentions. Actuellement, ils sont au nombre de 25. Ils se sont voulus avant tout un lieu de rencontre et d'échanges où se retrouvent tous ceux qui sont concernés, d'une manière ou d'une autre, par les problèmes de l'enseignement des mathématiques, quel que soit le niveau de cet enseignement. Pour cela, ils se sont vu confier la mission de donner une formation complémentaire aux professeurs en exercice (formation continue). Ils ont alors demandé les moyens de développer des recherches sur l'enseignement afin d'alimenter leur réflexion. Ils ont aussi voulu prendre part aux discussions sur les programmes, aider à la formation initiale et produire des curricula dans le but de promouvoir les solutions qu'ils préconisaient. Cependant, à l'exception de la mission de formation continue, les autres missions étaient déjà dévolues à des

organismes qui les assumaient, dans le cadre de préoccupations parfois fort éloignées les unes des autres. Il s'agissait donc aussi d'aider et d'orienter ces organismes qui n'avaient guère les moyens de rechercher des solutions nouvelles, ou de les harmoniser, et ceci sans se substituer à eux.

Originaux par rapport aux structures éducatives françaises qui sont de tradition fortement centralisées et hiérarchisées, les IREM sont des organismes universitaires, indépendants et régionaux. Chaque IREM a choisi des options et s'est organisé suivant les préoccupations prioritaires des équipes qui le composaient. Certaines actions, comme celles de formation, suivent un schéma assez uniforme, mais d'autres, comme la recherche ou la production, fonctionnent en association ou en complémentarité, de sorte qu'il est difficile de donner un modèle standard d'IREM, d'autant que le recensement et le classement de tous les documents produits s'est révélé une tâche presque impossible, nous en donnerons plus loin une explication.

Dans le domaine de l'enseignement élèmentaire, une quinzaine d'IREM ont eu une activité notable. Un numéro spécial du *Bulletin Inter-IREM,* (No. 16, 1978), préparé par la commission permanente des IREM à l'élémentaire (COPIRELEM), recense ces activités.

Pour illustrer les différents rôles des IREM dans le soutien qu'ils apportent aux enseignants de mathématiques au niveau primaire, nous allons étudier ci-après le cas d'un des IREM, l'IREM de Bordeaux, où ce genre d'activité s'est poursuivi sans discontinuer depuis l'origine, autour d'un projet à long terme clairement défini. Nous signalerons, à l'occasion, d'autres actions originales entreprises dans d'autres IREM. Nous espérons ainsi mettre mieux en évidence la cohérence, les nécessités et les difficultés de l'entreprise. Cependant, il faut faire remarquer que très peu d'IREM ont adhéré à ce projet et ont eu des actions comparables.

Motivations et finalités

A la fin des années cinquante, rien n'indique aux professeurs du niveau élémentaire qu'il faut réformer l'enseignement du calcul. Celui-ci vise l'intégration de la plupart des élèves au monde du travail à la fin de la scolarité obligatoire. Il a ses méthodes, son langage spécifique et ses modes d'évaluation. Les enfants (environ 25 %) qui accéderont au secondaire commenceront des études de mathématiques et n'auront à retenir de l'école primaire que des "algorithmes élémentaires".

L'allongement de la scolarité obligatoire d'une part, et la volonté d'unifier l'enseignement d'autre part, vont faire apparaître l'enseignement des mathématiques au primaire (6–11 ans) et au premier cycle du second degré (11–15 ans) comme des élèments cruciaux et pourtant

déficients ; car, l'objectif majeur devient l'accession pour tous, dès lors, aux études longues. Les programmes vont donc préparer les élèves à une activité professionnelle au fur et à mesure de leur détachement plus ou moins tardif d'un "tronc commun". Cette ambition généreuse impliquait un formidable pari sur les possibilités d'unification et de présentation progressive des connaissances.

En mathématiques, ce pari ne semblait pas trop hasardeux, d'une part par suite de l'existence d'une vaste réorganisation des connaissances bénéficiant des travaux sur les fondements des mathématiques des cent dernières années et, d'autre part, à cause des espoirs que le point de vue structuraliste permettait de nourrir, avec l'appui de travaux comme ceux de Piaget en épistémologie génétique.

En simplifiant, on peut dire qu'auparavant on enseignait au primaire, des "mécanismes fondamentaux", pour les réutiliser plus tard tels quels, dans le cadre d'une autre manière de formuler et d'expliquer les notions et que la compréhension, dans une certaine mesure, pouvait ne venir qu'après l'apprentissage. Il allait s'agir désormais de faire acquérir aux élèves, d'abord, des concepts fondamentaux et généraux, les automatismes pouvant venir plus tard.

Bien vite, il apparut que l'accent devait être mis sur le sens des notions apprises, qui devait être d'emblée correct, et donc sur la compréhension par les élèves, ainsi que sur la possibilité pour eux de formuler et d'expliquer ce qui leur était enseigné. Il en résultait la nécessité de concevoir des situations didactiques nouvelles, organisant les interactions des élèves avec leur milieu, et susceptibles de produire chez eux l'appropriation et l'usage des concepts mathématiques. Lorsque l'IREM s'est soumis à cette nécessité, il est apparu que ces interactions étaient spécifiques des savoirs produits et donc différentes d'une notion à une autre. Cependant, il paraissait raisonnable de penser que l'axiomatisation des mathématiques permettrait les unifications et les économies nécessaires.

Toutefois, les membres des IREM qui ont travaillé au niveau élémentaire ne bornaient pas leur ambition à viser une amélioration du niveau du petit lot d'élèves qui continueraient leurs études scientifiques, ni même à un accroissement de la quantité de mathématique au sens strict enseignée à tous les enfants durant l'âge de la scolarité obligatoire. Les finalités principales devraient embrasser un horizon éducatif plus large.

A l'école primaire, les élèves commencent à distinguer différentes sortes de raisons pour lesquelles ils devraient croire qu'une assertion est vraie : raisons éthiques, esthétiques, logiques. Les mathématiques sont à ce niveau-là le lieu privilégié (non le seul) de l'apprentissage de la "gestion" de la vérité et de la rationalité.

Les enfants ne doivent pas seulement apprendre une technique de raisonnement mais aussi une pratique sociale : comment convaincre

l'autre en le respectant, comment se rendre aussi à ses "raisons" sans faillir, en résistant à la séduction, à la rhétorique, aux réactions d'amour-propre, à l'autorité et à la force, comment et pourquoi se construit la responsabilité de ce qui se dit autour de soi.

Si le sujet et son désir ne se glissent pas, ne s'expriment pas, ne se construisent pas dans ces débats, alors il est impossible que s'établisse un bon rapport à la connaissance. Donc, tout en mettant l'accent sur l'acquisition des compétences individuelles, il est clair qu'il importe aussi de construire, par le type de situations proposées aux enfants, un exemple des relations sociales qui président à la production, à la gestion et à la communication du savoir.

Ces intentions traduisaient des finalités éducatives très générales et très profondes allant du civisme à l'épanouissement de la personnalité, de la pratique de la démocratie à l'élaboration du sujet cognitif, et ces extensions étaient claires et explicitées dès 1968 (Colloque d'Amiens).

Objectifs

Les objectifs de l'IREM, en ce qui concerne l'enseignement primaire, peuvent alors se déduire des considérations qui précèdent : il s'agit de préparer les formateurs de maîtres, les conseillers et les responsables (professeurs d'Ecoles normales, inspecteurs de l'éducation nationale, etc.) au changement des objectifs fondamentaux, puis de les aider à le réaliser. Ces intentions se traduisent d'abord par des objectifs de formation : le premier étant d'enseigner à une grande partie d'entre eux, non seulement la nouvelle organisation des connaissances mathématiques, mais souvent des contenus entièrement nouveaux.

Mais il était déjà clair pour beaucoup à l'époque-et cela s'est confirmé par la suite-qu'il ne suffirait pas d'enseigner les mathématiques aux maîtres et aux formateurs pour qu'ils créent, grâce à leur expérience, des situations d'enseignement adaptées. D'où un deuxième objectif de formation : élaborer avec les formateurs un minimum de moyens didactiques (leçons, matériels, etc.) utilisables par les maîtres après un "recyclage" assez court. Ces moyens devaient au moins leur permettre de comprendre de nouvelles notions et si possible les aider à résoudre les problèmes pédagogiques que les "concepteurs" pourraient avoir ignorés.

Cette juxtaposition de contenus et d'exemples pédagogiques est apparue elle aussi insuffisante : pour comprendre et maîtriser les phénomènes d'enseignement des mathématiques, il faut les traiter comme un champ scientifique nouveau et créer des concepts spécifiques. Il est résulté de cette observation, outre des objectifs de recherches dont nous parlerons plus loin, un nouvel objectif de formation : enseigner les moyens fondamentaux de l'organisation et du contrôle des situations

didactiques ainsi que les concepts théoriques correspondants (didactique).

Ces trois types d'objectifs n'ont été dégagés que très progresssivement et n'ont pas été acceptés en même temps par tous les IREM. Ceci s'explique : la démarche très pragmatique choisie pour leur action les conduisait à poser les problèmes d'une façon très différente ; nous allons examiner ce point en même temps que les objectifs de recherche.

La fin des années soixante avait vu se développer des propositions, des actions nombreuses et diverses qui avaient abouti à de nouveaux "programmes pour l'enseignement primaire". Ces programmes, en faisant une place aux concepts mathématiques fondamentaux, allaient motiver l'intérêt des maîtres pour ces nouvelles conceptions et justifier les interventions des IREM. Mais ces propositions, même les plus "concrètes", suscitaient encore beaucoup de questions et de difficultés. Il a donc fallu se donner des objectifs de recherches que nous qualifierons "d'appliquées et de développement". Il s'agit d'évaluer les pratiques en cours et de faire au fur et à mesure des suggestions, de produire des aides pédagogiques et des matériels plus évolués afin d'alimenter constamment la réflexion indispensable qui accompagne la formation' Cet objectif a subsisté même lorsque la formation permanente des maîtres a été assurée par les Ecoles normales.

Initialement, les solutions envisagées étaient essentiellement pragmatiques et empiriques : il suffisait, pensait-on, de se concerter, de réunir des compétences variées, de consulter chacun et d'avoir le temps d'essayer la solution choisie, puis d'avoir les moyens de la diffuser et de l'expliquer. On pensait que les professeurs étaient les mieux placés pour l'adapter, en apprécier les résultats, et on en concluait qu'ils étaient les seuls à devoir le faire. C'est pourquoi les recherches en vue de la production des moyens d'action sur l'enseignement devaient naturellement être étroitement associées au recyclage des formateurs et à la formation des maîtres. Les partenaires, quelles que soient leurs origines (enseignement supérieur, élèmentaire, Ecoles normales, corps d'inspection), ont trouvé à l'IREM un lieu de discussion où l'on pouvait provisoirement oublier les contraintes hiérarchiques et travailler dans un esprit de coopération, de dévouement et d'amitié. Ce genre d'activités appelées parfois "recherche-action" présente une utilité certaine. Ses limites sont cependant apparues assez vite.

D'abord, les modifications envisageables sont fortement limitées par les connaissances préalables et les habitudes des enseignants. Il faut donc prévoir des actions échelonnées dans le temps et même, comme le fait l'IREM de Bordeaux, produire des brochures différentes selon l'état d'information ou les choix pédagogiques des maîtres. Ensuite, le fait d'admettre que les seuls critères d'évaluation des méthodes sont, soit a priori la "qualité" de l'auteur, soit a posteriori le succès des productions auprès des utilisateurs, finit par empêcher toute vraie dis-

cussion. Dès lors, l'argument de "nouveauté" l'emporte sur l'examen de la valeur des méthodes, qui se succèdent au gré des modes en effaçant ou en niant les précédentes.

Même si l'on avait accepté une conception plus classique des recherches appliquées et de développement, des problèmes importants restaient sans solution : ceux du choix des méthodes d'enseignement et de la justification de ces choix, ceux de leur reproductibilité, de leur communicabilité aux enseignants et, de façon générale, ceux de contrôle des actions et des résultats. Il a été alors estimé que la solution de ces problèmes dépendait d'abord d'une meilleure connaissance des phénomènes fondamentaux de la didactique. Certains IREM ont alors développé des recherches fondamentales, avec l'intention, à plus ou moins long terme, de concourir au contrôle et à l'orientation des actions d'enseignement de formation et de recherche-action. On peut classer ces recherches en deux grandes familles selon la façon dont y sont conçus les rôles antagonistes et complémentaires de la théorie, de l'action et de l'expérience en didactique. La première famille tend à fournir des descriptions de plus en plus précises et détaillées de l'état du système d'enseignement, de son évolution : les connaissances et les comportements des élèves, les comportements des maîtres, etc. Les recherches procèdent notamment par des enquêtes, des tests d'acquisitions, des questionnaires, des entretiens cliniques, des études "génétiques", etc. La deuxième famille tend à approcher les processus et les situations d'enseignement dans leur fonctionnement et leur production. La recherche de la reproductibilité des méthodes d'enseignement a progressivement amené les expérimentateurs à organiser de véritables observations conduites par des équipes nombreuses présentant des compétences variées. Il a fallu bientôt créer de nouveaux concepts propres à décrire les situations didactiques, à distinguer, inventorier et hiérarchiser les conditions pertinentes qui les déterminent. Il a alors été possible, dans certains cas, de faire de véritables prévisions sur les résultats d'une modification des conditions d'enseignement. Ces analyses ont en retour permis, d'une part, la reconnaissance de véritables phénomènes de didactique dont l'étude se poursuit activement, d'autre part, l'émergence d'une sorte d'"ingénierie didactique" qui utilise ces connaissances théoriques pour orienter la production systématique de situations ou de méthodes d'enseignement dont les résultats peuvent être prévus dans une certaine mesure.

Cet ensemble d'objectifs établis par l'IREM de Bordeaux dès sa création et visés avec obstination depuis ne fait pas l'objet d'un accord unanime. C'est d'ailleurs l'absence d'un usage accepté des concepts de didactique qui a rendu jusqu'à ce jour l'identification et le classement des textes produits dans les IREM presque impossibles.

Objectifs dérivés

Les premiers travaux ont été encourageants, mais ils ont amené à penser que, pour améliorer sensiblement l'enseignement de certaines notions, il fallait sans doute changer de nombreuses conditions de manière radicale et simultanément et, pour cela, investir des efforts considerables dans diverses directions. Une étude approfondie (de 1967 à 1973) des conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques a alors montré la nécessité de la création d'un centre pour l'observation dans un groupe scolaire (1972). Deux centres de ce type se sont créés dont l'un fonctionne encore. Ce centre, dont nous parlerons plus loin, permet de produire et d'observer des modifications importantes des conditions d'enseignement, sans faire prendre de risques aux enfants ni à l'administration. Un tel centre s'est révéle si indispensable que l'un des objectifs les plus importants de l'IREM de Bordeaux, pendant dix ans, a été d'en assurer le fonctionnement.

Les recherches à caractère méthodologique sont, elles aussi, d'une importance capitale, les dépendances et les implications entre conditions didactiques et comportements par exemple, font l'objet de réflexions fructueuses (Pluvinage, 1976, Gras, 1980) dont certaines s'appuient sur les résultats des expériences et s'inspirent des problèmes concrets que l'on y rencontre. Un effort théorique important a permis l'identification des situations et leurs comparaisons, le recensement des apports, le classement des questions soulevées et la discussion sur la validité et l'originalité des assertions ainsi que celle des méthodes de preuve. Nous voyons ainsi émerger un champ de connaissances portant sur ce qui, dans l'activité d'enseignement, est spécifique du savoir enseigné et qui se définit en France comme la *didactique des mathématiques.* Ce champ comprend, à côté des connaissances théoriques et appuyées sur ces dernières, celles qui sont nécessaires à la production et au contrôle des situations des matériels et des dispositifs didactiques destinés à l'enseignement. La recherche en didactique des mathématiques se développe au sein d'une communauté de chercheurs qui s'est organisée, au cours des cinq dernières années, suivant les structures habituelles, permettant un débat scientifique. Elle a assez largement débordé le cadre initial des IREM puisqu'on y trouve des formations du CNRS, du Centre d'études des processus cognitifs et du language, du laboratoire d'informatique et de mathématiques appliquées de Grenoble (IMAG) et de l'Institut national de recherche pédagogique (INRP). Mais les IREM ont fortement contribué à ce développement et, parmi ceux qui ont fait un effort important pour l'enseignement élémentaire, il faut noter ceux de Paris, Grenoble et Bordeaux (qui depuis 1975 est habilité à délivrer des diplômes de 3ème cycle de didactique des mathématiques).

Interdépendance des objectifs

Nous avons essayé de montrer que tous les objectifs étaient complémentaires et interdépendants, comme les actions qui les visent. La nécessité de former des inspecteurs, par exemple, stimule les enquêtes et la formulation des résultats ; les exigences d'une situation expérimentale conduisent à produire des situations didactiques achevées, reproductibles et satisfaisantes aux divers points de vue ; l'identification des faits didactiques imprévus est rendue possible par l'effort de description et d'observation, lequel était justifié par la volonté de soumettre les travaux au débat scientifique. Le développement progressif des actions évoquées au paragraphe qui suit est une des conséquences de ces motivations et, s'est fait sur le modèle de développement en "spirale", les progrès selon chaque axe étant conditionnés par ceux accomplis dans les secteurs voisins. De plus, certaines actions se sont éteintes, d'autres sont apparues, suivant les nécessités et les opportunités. La présentation anhistorique qui suit sera donc un peu faussée : tout ne s'est pas fait toujours et partout.

Conditions des actions de l'IREM à l'école primaire

Avec l'organisation de la formation permanente des maîtres en 1970, dans les Ecoles normales, s'achève la mise en place d'un système très complet, officiellement chargé d'apporter toutes les formes d'aides nécessaires aux instituteurs :

Formation initiale et continue dans les Ecoles normales et dans les circonscriptions avec la collaboration des professeurs d'Ecoles normales, des inspecteurs et des conseillers pédagogiques ;

Documentation et animation de "recherches-actions" dans les centres régionaux de documentation pédagogique et dans les Equipes départementales de recherche et d'action pédagogique (EDRAP) ;

Recherches pédagogiques sous diverses formes organisées et coordonnées principalement par l'INRP, par l'intermédiaire des commissions régionales ou départementales ;

Diffusion des aides par l'Office français des techniques modernes d'éducation (OFRATEME) ou par les éditeurs privés.

Donc, à priori, l'IREM n'a pas, sur le plan adminisdratif, compétence pour apporter une aide directe aux professeurs de l'enseignement primaire. Il n'a pas non plus toute la compétence scientifique requise car il est clair qu'à ce niveau, les considérations psychopédagogiques et le projet éducatif d'ensemble l'emportent sur les exigences de la discipline. Aussi les informations mathématiques que peut apporter l'IREM devront-elles être transformées en leçons pour les élèves à travers toute une

suite d'adaptations que seul le système éducatif est réputé capable de (et autorisé à) réaliser, contrôler et répercuter. En fait, ce système ne fonctionne pas très bien. Parmi les indices et les causes de dysfonctionnement, on peut relever les suivants, la plupart d'entre eux ont été très souvent dénoncés :

En l'absence d'exemples de leçons, la plupart des maîtres ne peuvent pas enseigner les nouveaux contenus de façon satisfaisante ; d'où la nécessité – et l'existence – d'un foisonnement de "recherches" et d'expériences ayant pour objet principal l'innovation et sa propagation par tous les moyens. Ces recherches et expériences apparaissent à tous les échelons du systèm, impossibles à coordonner ou à comparer. Car, si elles se copient souvent, elles ne s'appuient pas les unes sur les autres, et ne se critiquent jamais directement non plus ; au contraire, elles se protègent par un recours aux autorités les plus diverses (y compris la tradition mercantile qui autorise la critique littéraire mais refuse celle des manuels de classe) ;

Le passage à l'étape du développement conduit à de cruelles déceptions car la mise en oeuvre des "innovations" n'est pas sous le contrôle de connaissances à caractère scientifique : les conditions de la reproductibilité sont inconnues ;

Les formateurs n'arrivent pas bien à définir le contenu de leur enseignement : en dehors des disciplines de base : mathématiques, psychologie, pédagogie, tout ce qui est nécessaire à l'organisation de l'activité didactique fait figure de commentaires, et est considéré comme échappant à toute théorisation, à toute description concevable, à tout inventaire.

Aucun organisme ne peut rassembler les moyens d'étudier dans son ensemble une action didactique, comprenant le choix d'un projet, l'élaboration d'une méthode appuyée sur des connaissances scientifiques des processus d'apprentissage et d'enseignement en jeu, la formation des maîtres, le contrôle de l'action et l'évaluation des résultats.

La cause principale des difficultés est l'absence réelle de rétroactions pour tout un ensemble de décisions, dont celles qui concernent la didactique des mathématiques : l'enseignement n'a pas tendance à s'améliorer ni par de simples retouches empiriques ni autrement ; l'inertie est sa seule protection contre la dérive. Conçu fondamentalement sur le modèle administratif, ce système, organisé pour la transmission des connaissances, ne permet pas l'institutionnalisation de celles qui apparaissent au cours de son fonctionnement. Ceci est particulièrement vrai pour les connaissances sur l'enseignement lui-même. Au contraire, pour de nombreuses raisons, il s'y oppose. Les programmes, les instructions, la formation complémentaire décidée par l'administration, sont des ordres à l'intention d'agents d'exécution, les évaluations sont des enquêtes et les organismes de recherches, des bureaux d'études.

En dernier ressort, ordres et demandes de précisions sont les seuls messages compatibles avec cette conception administrative. La réflexion est officiellement encouragée mais elle reste une activité privée et gratuite. A tous les points de vue l'entreprise d'enseignement est totalement centralisée et cloisonnée de façon rigide, ce qui rend très difficile toute concertation : dans une telle organisation, la reconnaissance officielle d'une difficulté appellerait, à coup sûr, la désignation d'un responsable. La formation et la recherche y ont donc des statuts ambigus.

Actions, et modalités d'actions

Principes

Sur la base de l'analyse que nous venons d'esquisser, l'IREM a cherché à combler les lacunes, à tenir les rôles de coordination que personne n'assumait, de façon à favoriser le fonctionnement du système, tout en appliquant – dans la mesure du possible – quelques rétroactions. Cela l'a conduit à participer à tous les types d'actions d'enseignement comportant une composante mathématique, afin de les étudier avec des équipes plus variées, plus importantes et mieux centrées sur un projet d'ensemble que celles que pouvaient réunir les divers organismes en présence. Ces études ont permis et permettent toujours de dégager de nombreuses suggestions étagées sur des analyses approfondies et sur des recheches anthentiques.

Ces résultats sont mis à la disposition des responsables avec insistance mais discrétion, à charge pour eux de les répercuter ou de décider de les appliquer ou non. L'IREM organise à cet effet de nombreuses activités (stages, réunions de concertation, conférences, etc.) où les participants ne viennent que parce qu'ils y voient un certain intérêt. Pour maintenir une pression discrète, l'IREM doit conserver les moyens de diffuser les connaissances acquises par d'autres canaux, si cela devient nécessaire. De même, il ne doit pas pouvoir être coupé des sources d'informations et doit pouvoir mener des enquêtes régulières sur des populations importantes d'élèves.

Pour exercer avec doigté et efficacité ce rôle d'interlocuteur et de contre-pouvoir, l'IREM doit entretenir des relations étroites avec l'enseignement élémentaire, et bien le connaître, ce qui suppose certaines collaborations.

Formes

Les actions de l'IREM vers les enseignants du primaire ont revêtu des formes trés variées :

Par les cibles : élèves, parents, maîtres en exercice ou en formation, formateurs de maîtres, responsables, inspecteurs et conseillers

pédagogiques, novateurs, chercheurs, maîtres d'application ;

Par les moyens : polycopiés, articles dans divers types de périodiques, ouvrages, films, conférences, stages, débats, clubs de mathématiques ;

Par les types d'échanges : textes d'incitation, documentation (à la demande des intéressés), informations (à l'initiative de l'institut), formation (négociée) ;

Par les contenus : cours de mathématiques, cours de didactique, textes d'histoire ou d'épistémologie, description de suites de situations d'enseignement, comptes rendus d'observation, études d'objectifs, commentaires de programmes, résultats de recherches ou d'enquêtes, expériences "à faire", etc.

Par les canaux : ses propres canaux, des canaux privés, OFRATEME, CRDP (centre régional de documentation pédagogique), Radio-télévision scolaire (RTS), etc.

Toutes les modalités de chacune de ces formes et de ces types d'actions ont été réalisées à l'IREM de Bordeaux au moins une fois à titre d'essai ou d'expérience. Ces actions peuvent être appréciées par le nombre impressionnant de documents produits. Les tirages sont relativement faibles car il s'agit d'actions indirectes mais la continuité des efforts est attestée par le nombre de documents successifs sur un même sujet, traité par des équipes différentes qui critiquent et reprennent leurs conclusions.

Les contenus cognitifs des actions

L'examen des sujets mathématiques traités montre qu'ils recouvrent tous les chapitres du niveau élémentaire. Le public a surtout retenu les innovations relatives à l'enseignement précoce de la logique avec l'aide des diagrammes ou du matériel Dienès. Cependant, on trouve peu de publications sur ces questions et la plupart tendent à critiquer les usages naïfs proposés par les manuels de l'époque et les théories structuralistes qui les inspirent. En revanche, les études sur l'apprentissage des procédures de calcul, sur les nombres naturels ou décimaux, leurs opérations (problèmes additifs et multiplicatifs, relation d'ordre, etc.) et les relations qui s'y vérifient, sur la géométrie, sur les probabilités et sur la mesure, abondent en suggestions originales. Toutes mettent l'accent sur l'importance des situations qui permettent à l'enfant de comprendre, de créer, et de faire fonctionner les concepts qu'on lui enseigne. Nous retrouverons nombre de ces situations dans les programmes de 1978–1980.

Une classification de ces situations et de ces processus d'apprentissage ou d'enseignement, selon que certaines relations s'y trouvent réalisées ou non, a permis de mieux préciser et de mieux interpréter les comportements des maîtres et des élèves, et par là de prévoir cer-

tains effets, ou d'expliquer des différences de résultats dans des leçons apparemment semblables. Ce sont les situations d'action, de formulation, de preuvre et d'institutionnalisation (ou de "décontextualisation") de la connaissance. Cette classification met en avant une hiérarchie de critères plus ou moins spécifiques des mathématiques, ou de tel ou tel concept de ce domaine, qu'il convient d'examiner pour contrôler la production, la reproduction et l'analyse de telles situations. Ces critères permettent, par exemple, d'apprécier l'anticipation demandée au sujet, et les risques qu'il prend, le saut informationnel que comporte la situation, les contraintes des communications ou celles du contrat didactique et leur effet sur le sens des manifestations de connaissance observables.

Le fait de pouvoir mieux "contrôler" l'organisation et le déroulement des "leçons" aussi bien du point du vue théorique qu'expérimental a favorisé la mise en évidence puis l'étude de certains phénomènes fondamentaux didactiques : la transposition didactique, diverses sortes d'obstacles et d'échecs, etc. La recherche principale a porté sur la remise en cause de ce qu'il est convenu d'appeler l'apprentissage des "mécanismes". D'où vient cette idée que la conception, la mise en oeuvre et la compréhension des notions fonctionneraient séparément et différemment selon qu'il s'agirait de leur invention, de leur emploi, de leur apprentissage ? Est-il inéluctable que chaque "utilisateur" des mathématiques soit cet acteur, prisonnier d'un texte écrit ailleurs et qu'il ne peut finalement que citer ? D'où vient que le conditionnement, dans un domaine où finalement il est si contraire à l'esprit et à la pratique des mathématiques, apparaisse toujours comme une obligation impérieuse (aussi bien à l'homme de la rue qu'à certain prix Nobel). L'histoire et l'épistémologie des mathématiques ont apporté dans ce domaine des arguments utiles.

L'essentiel de l'action de l'IREM et sa légitimité a finalement reposé sur la pertinence, l'originalité et le sérieux de ses travaux de recherches. Il n'est pas possible de les présenter ici. Mais il faut remarquer que ce n'est pas en se limitant à répondre aux besoins exprimés par les maîtres que l'on peut le mieux les aider mais en dépassant les analyses (nécessairement limitées) que leur inspire leur activité professionnelle et en proposant d'abord des explications, des suggestions ou des solutions, en essayant de protéger une part de leur activité de la tyrannie de idéologies et des modes, en montrant que l'on sait maîtriser certains phénomènes et d'autres non, qu'on peut exiger d'eux certaines choses et que d'autres demandes sont contradictoires.

Il existe un certain nombre de pays qui reconnaissent la nécessité d'une liaison étroite entre la formation des maîtres et la recherche en éducation. Trop souvent, cette liaison a conduit à la méconnaissance des faits d'enseignement spécifiques de la connaissance. Aux Etats-Unis d'Amérique, par exemple, il existe un puissant ensemble de travaux de

recherche en didactique mais sauf pour quelques exceptions, ce terme recouvre une activité fondamentalement différente, en ce sens que ni les objets d'études, ni les méthodes ne sont les mêmes. Toutefois, il semble que la situation soit en train d'évoluer et que la composante épistémologique de la didactique soit en passe d'être reconnue.

Conclusion

En résumé, l'action de l'IREM s'autorise d'une double compétence, en mathématique d'abord, mais surtout en didactique : celle que lui confèrent les recherches théoriques et expérimentales sur les processus d'enseignement qu'il a pu mener sur le terrain ou dans son centre pour l'observation. Elle se justifie dans la mesure où ses propositions sont présentées et reconnues comme des moyens d'améliorer les comportements des enfants à l'intérieur d'un projet éducatif global. Elle est fondée sur le débat, la négociation, la recherche de la vérité et de conclusions soumises clairement à l'examen de chacun, et sur la rigueur des critiques et celle des remises en cause. Mais cette action tend davantage à fournir des explications des erreurs ou des difficultés que des jugements : et elle fait passer la compréhension des phénomènes avant leur évaluation ou les nécessités de l'action. Pour cette raison, les IREM doivent refuser d'être intégrés dans le système de décision.

Facteurs favorables

Cependant, parmi les facteurs déterminants qui ont fait que l'IREM de Bordeaux a pu réussir et persévérer dans certaines actions qui ne se sont pas produites ou qui ont fini par cesser dans d'autres IREM, le premier a été l'existence, dès l'origine, d'une équipe d'animateurs composée d'une cinquantaine de professeurs de mathématiques d'Ecoles normales de la région (dont certains font depuis plus de dix ans un trajet hebdomadaire de 300 km pour apporter leur collaboration), de quelques membres de l'enseignement supérieur d'origines diverses (2 mathématiciens, 1 physicienne, 2 psychopédagogues, 1 psycholinguiste, 2 linguistes) et d'enseignants et de responsables du premier degré. Cette équipe a évolué et a pu recevoir de nouveaux membres : elle a été soudée par un ambitieux programme, original et ouvert, de recherches et d'actions utiles à chacun.

Le second facteur a été la création du centre d'observation associé au groupe scolaire Jules Michelet de Talence. Dans cet établissement où l'IREM assume la responsabilité scientifique, 23 maîtres travaillent à deux tiers de temps dans dix classes élémentaires et quatre classes maternelles. Ils disposent chacun d'un tiers de leur temps pour organiser les observations. Ainsi, de petites équipes peuvent travailler assez longtemps en association assez étroite pour modifier sensiblement les condi-

tions d'enseignement et les étudier, sans faire prendre de risques aux élèves. L'activité de l'IREM englobe :

L'observation soutenue des élèves et des maîtres, le recueil des renseignements longitudinaux sur une longue durée permettant la mise en évidence des phénomènes ou de processus provoqués ou non (comme, par exemple, le vieillissement des situations didactiques ou des processus comme les réactions à l'évaluation) : elle a permis la mise au point de techniques de gestion des données didactiques utiles aux classes d'application pour faciliter la formation initiale des maîtres ;

La réalisation de situations d'enseignement destinées aux élèves en vue d'observations ou d'expériences de didactique : il s'agit de suites de leçons formant un processus d'enseignement d'un concept mathématique, généralement nouvelles et dont il faut déterminer les conditions de fonctionnement et de reproduction ;

La préparation d'expériences ou d'enquêtes à réaliser sur des populations plus importantes ou à proposer à des organismes de formation ou de recherche.

Les troisième facteur a été l'organisation de rapports convenables avec des "utilisateurs" : la formation des IDEN (Inspecteurs Départementaux de l'education nationale), des PEN (professeurs d'Ecole normale) et à travers eux, des maîtres, était conçue dans un esprit d'égalité, de responsabilité, de liberté et de contrôle réciproque.

Le quatrième et dernier facteur a été la création, à l'Université, d'une formation de 3ème cycle de didactique des mathématiques. La production des savoirs nécessaires à la formation des maîtres, rendue possible par l'activité dans cette école de chercheurs de haut niveau, aidait et motivait l'équipe d'animateurs.

Mais peut-être le facteur décisif est-il d'ordre idéologique. Sans relâche, les chercheurs se sont attachés à déterminer les conditions dans lesquelles les enfants doivent être placés pour mettre en oeuvre, formuler, produire une activité mathématique, étant entendu que l'appropriation et l'apprentissage doivent se fonder autant que possible sur un usage, une pratique qui donne du sens aux connaissances acquises. Les maîtres n'ont eu souvent que peu d'occasions d'avoir une telle activité, dans un climat d'enrichissement humain et d'engagement personnel. Les seuls souvenirs qu'ils gardent des mathématiques sont ceux de cours, de certitudes cachées ou révélées, d'apprentissages, de mémorisations, d'applications, d'interrogations, de fautes, de terreurs . . . toutes choses éloignées d'une activité authentiquement mathématique. En leur donnant l'idée et les moyens d'organiser, dans leur classe, une sorte de cénacle passionné par le goût de la rationalité et l'amour de la recherche de l'accord de tous par la preuve ou la quête des erreurs, on a restauré l'heure de mathématiques en tant que moment d'éducation et d'épanouissement des élèves par l'instruction.

Les difficultés

Nous avons amplement mis l'accent sur les difficultés institutionnelles : il ne peut exister de formation s'il n'y a pas de connaissances spécifiques à enseigner, ce qui implique des recherches, donc des chercheurs, donc une reconnaissance, laquelle suppose l'existence préalable de théories et de méthodes ; ces dernières ne peuvent apparaître que dans des recherches expérimentales, ce qui suppose la création de centres de recherches appropriés. Mais ces centres ne peuvent exister que s'il existe déjà un savoir constitué et des chercheurs, etc.

Il s'agit moins ici de difficultés que de veritables obstacles épistémologiques et sociaux à l'émergence de la didactique. Tant qu'un obstacle n'est pas franchi, tout début de solution provoque la mise en oeuvre de forces de correction qui ramènent ce système à l'état antérieur. L'avenir dira si nous étions prêts à résoudre ces problèmes. Or, le seul moyen sérieux d'avoir des exigences raisonnables envers les maîtres et de les soutenir par une aide adaptée, est justement l'existence d'un tel corps de connaissances.

Les résultats

L'aide de l'IREM à l'enseignement élémentaire est un succès reconnu en ce qui concerne la qualité des contenus proposés, les principes d'intervention, les connaissances théoriques développées et les retombées sur la pratique de l'enseignement. Il est vraisemblable pourtant que cette action sera considérée comme un échec aussi bien par les enseignants que par les responsables politiques. Examinons la situation actuelle en France et confrontons-la aux objectifs annoncés : les mathématiciens ne sont plus très nombreux à être convaincus de leur responsabilité dans la formation des maîtres et dans l'exercice de la vigilance épistémologique sur l'enseignement élémentaire. Quand ils le sont, ils ne pensent généralement pas qu'il soit nécessaire de s'aider de l'"attirail" de ces connaissances marginales (de didactique) pour être entendus. Dans la formation des maîtres du premier degré organisé en 1980, le choix d'aligner cette formation, dans toutes les disciplines, sur un "modèle unique" rend inutiles les percées effectuées en didactique des mathématiques. D'autre part, le nombre des formateurs ayant les connaissances requises et l'expérience de la recherche est tout à fait insuffisant pour prendre en charge cette formation si on la créait. Plus encore, ces formateurs n'ont pas le bon statut : ce sont la plupart du temps des professeurs d'Ecoles normales qui se sont intéressés à ces connaissances parce qu'ils ont eu l'occasion de voir leur utilité.

Les recherches en didactique elles-mêmes sont condamnées à la naïveté et/ou à l'échec car, à mesure que ces connaissances en didac-

tiqué deviennent plus complexes et plus techniques, il devient de plus en plus difficile à un étudiant bon mathématicien de consacrer le temps nécessaire à leur acquisition avant d'entreprendre de faire avancer ce domaine. Seul espoir de certains : l'idéologie. Peut-on espérer un grand engouement du public pour l'enseignement des mathématiques comme en 1965–1970 ? Hélas, les enseignements développés par les travaux dont nous parlons ne sont ni diffusés, ni compris, ni repris : l'illusion de la transparence des faits didactiques tend à faire croire que tout un chacun peut juger et analyser toutes les déclarations sur l'enseignement sans aucune préparation ni connaissances préalables. Elle conduit aussi à penser qu'il suffit de donner aux enseignants les moyens matériels d'une action purement pragmatique pour qu'ils résolvent les problèmes qui leur sont posés. Cette illusion est plus forte que jamais et conduit sans relâche aux mêmes erreurs. Ainsi, dans le débat indispensable entre l'école et les parents, il semble qu'on croie toujours pouvoir régler ces questions par des arguments d'autorité en faisant l'économie de la création des moyens de médiation et de recours que constitueraient des organismes de recherche vraiment indépendants des deux parties et qui seuls seraient susceptibles de former et d'informer effectivement le public.

Pour l'instant et pour toutes ces raisons au moins (il y en a d'autres) l'action des IREM auprès des maîtres est difficile à conduire, à défendre et à apprécier. Il est permis d'espérer toutefois, que les efforts considérables qui ont été accomplis, assez souvent de façon bénévole et gratuite, parfois contre l'opinion commune, ou même contre des forces extrêment puissantes, ne l'ont pas été en vain.

Références

Bulletin inter-IREM, No. 16, 1978. (Numéro spécial préparé par la COPIRELEM).

Collectif de défense des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques. *On achève bien les IREM.* Paris, Solin, 1979. (Almanachs). (Diffusé par Distique).

COLMEZ, François. 1979. L'enseignement des mathématiques aux niveaux préélémentaire et primaire. Dans : *Tendances nouvelles de l.enseignement des mathématiques*, Vol. IV, pp. 7–32. Paris, Unesco.

GRAS, Régis. 1979. *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques.* Université de Rennes I. (Thèse d'Etat).

Mission des IREM dans la formation continue des enseignants. *Bulletin inter-IREM* No. 4 (supplément), 1973.

Mission et activités des IREM. *Bulletin inter-IREM*, No. 17, 1979.

PLUVINAGE, François. 1977. *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques.* Université de Strasbourg. (Thèse d'Etat).

Recherche en didactique des mathématiques. 1981. Claix (France), La Pensée

sauvage. (Diffusé par Diffedit).

REVUZ, André. Texte d'une communication présentée à la Réunion d'experts sur les objectifs de l'enseignement des mathématiques, Paris, Unesco, 19–23 mai 1980. Paru ultérieurement sous le titre : Les objectifs de l'enseignement des mathématiques compatibles avec le développement des mathématiques en tant que discipline. Dans : R. Morris (dir. pub.), *Etudes sur l'enseignement des mathématiques,* Vol. 2, pp. 105–116. Paris, Unesco. 1981.

Rôles des IREM. *Cahier de liaison du CREM,* No. 6, 1969. Bordeaux, Centre régional de documentation pédagogique.

ROUCHIER, André ; LEDOUX, Fernand ; ROZOY-SENECHAL, Brigitte. *La politique de l'ignorance. Mathématiques, enseignement, société.* Paris, Recherches, 1980. (Revue No. 41). (Diffusé par SODIS).

Notices biographiques

GUY BROUSSEAU est maître-assistant de mathématiques à l'Université de Bordeaux I à Bordeaux (France). Né en 1933, il a été instituteur de 1953 à 1963. Depuis 1959, il s'est consacré à l'étude et à la réforme de l'enseignement des mathématiques au niveau élémentaire, d'abord dans les écoles où il enseignait, puis de 1965 à 1970 au CRDP de Bordeaux et enfin à l'Université de Bordeaux I, où il a été nommé en 1970 après avoir terminé ses études universitaires. En 1964, il a publié un des premiers ouvrages sur la question. Il a contribué à la création de l'IREM, puis a fondé et dirigé le Centre d'observation qui est géré en association avec l'école Jules Michelet de Talence. Depuis 1975, il est chargé de cours de didactique et statistique dans le cadre de l'enseignement de troisième cycle de didactique des mathématiques, tout en continuant à enseigner les mathématiques.

Il est actuellement secrétaire de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques, aux travaux de laquelle il est associé depuis 1961.

M. A. (KEN) CLEMENTS est maître de conférences de mathématiques à la Monash University de Melbourne (Australie). Après des études supérieures de premier cycle en mathématiques pures et appliquées, il a obtenu une maîtrise des sciences de l'éducation et un doctorat à l'Université de Melbourne. Il a enseigné pendant dix ans dans diverses écoles avant d'être nommé à Monash en 1974. Ses principaux sujets de recherche sont l'histoire de l'enseignement des mathématiques et les processus cognitifs (notamment l'imagerie mentale) qui interviennent dans l'apprentissage des mathématiques. En 1975, il a été consultant de l'Unesco en Thaïlande et, en 1980, il a travaillé en Papouasie-Nouvelle-Guinée, où il a étudié les facteurs qui influent sur l'apprentissage des mathématiques dans ce pays.

BENJAMIN A. ESHUN est maître-assistant au Département de pédagogie des sciences à l'Université de Cape Coast (Ghana). Il a auparavant enseigné dans une école secondaire et a été Président de l'Association de mathématiques du Ghana. Il est membre des équipes qui rédigent les textes de l'Advanced Mathematics Project et du West African Regional Mathematics Programme. Il s'intéresse principalement à l'élaboration des programmes scolaires, à l'enseignement des mathématiques et aux premiers concepts numériques chez l'enfant.

JOSEFINA C. FONACIER a un B.Sc. en sciences de l'éducation (*cum laude*) avec spécialisation en "mathématiques" de l'Université des Philippines (1948) et une maîtrise de mathématiques de l'Université Columbia à New York. Elle est respon-

sable de la pédagogie des mathématiques au Centre de pédagogie des sciences de l'Université des Philippines et directrice adjointe du Centre. Outre l'enseignement des mathématiques, ses activités antérieures comprennent la formation continue des enseignants et leur formation au niveau universitaire, l'élaboration des programmes scolaires et des recherches en pédagogie des mathématiques. Pendant toute sa carrière, elle a participé activement aux actions d'aménagement du programme scolaire de mathématiques et de formation des maîtres du gouvernement philippin. Au cours des quatre derniers trimestres, elle a été élue et réelue vice-présidente de l'Association philippine des enseignants de mathématiques.

KLAUS GALDA est né en 1943, il a obtenu un B.Sc. de mathématiques de l'Université d'Etat du Montana (Etats-Unis d'Amérique), a étudié les mathématiques et la philosophie à l'Université de Hambourg (République fédérale d'Allemagne) et est docteur en philosophie (logique et fondements des mathématiques) de l'Université de Stanford (Etats-Unis). Il a enseigné les mathématiques et la logique à l'Université catholique de Rio de Janeiro, au Brésil, et l'anglais au Laboratoire national de langues d'Osaka, au Japon. Depuis 1977, il travaille pour l'Université de Stanford au Projet d'enseignement radiophonique des mathématiques (Radio Mathematics Project) mis en oeuvre au Nicaragua et participe à un certain nombre d'activités similaires dans d'autres pays. Il a été consultant de l'USAID, de l'Unesco et de la Banque Mondiale pour l'enseignement primaire en Amérique latine, en Asie et en Afrique.

ANDREW HERRIOT est maître de conférences à l'Institut national de formation pédagogique de Maseru, au Lesotho. Il a un diplôme d'études approfondies de l'Université Heriot-Watt, d'Edimbourg (Ecosse). Il a été nommé pour cinq ans au Lesotho dans le cadre au programme Aid to Commonwealth Teaching Science (ACTS). Après six ans d'enseignement scolaire, il a commencé à s'intéresser à la formation des maîtres en 1969 et a occupé divers postes dans des instituts de formation pédagogique en Ecosse (Hamilton College of Education), au Ghana (Advanced Teacher Training College) et au Lesotho (NTTC). Il s'intéresse principalement aux matériels pédagogiques destinés à la formation initiale ou continue des enseignants de mathématiques, ainsi qu'aux techniques d'évaluation de la formation pédagogique.

PEGGY A. HOUSE est professeur associé de la pédagogie des mathématiques à l'Université du Minnesota, aux Etats-Unis d'Amérique. Elle est titulaire d'une maîtrise et d'un doctorat de pédagogie des mathématiques et de la physique de l'Université d'Etat du Kansas. Le professeur House dirige le programme de pédagogie des mathématiques de l'Université du Minnesota destiné à formation des enseignants du secondaire. Elle a publié deux monographies, trois chapitres de l'annuaire qu'édite le National Council of Teachers of Mathematics et de nombreux articles de revues. Ses principaux centres d'intérêt sont la formation des maîtres, la résolution de problèmes, l'enseignement aux élèves doués et l'intégration des enseignements de sciences et de mathématiques. Elle est actuellement vice-présidente du Minnesota Council of Teachers of Mathematics et membre du conseil d'administration. Elle

est aussi présidente du comité des publications de la School Science and Mathematiques Association.

DAVID C. JOHNSON est professeur de pédagogie des mathématiques (chaire Shell) au Centre for Science and Mathematics Education (CSME) du Chelsea College de l'Université de Londres (Royaume-Uni) depuis l'automne 1978. Il est titulaire d'un B.A. de sciences physiques, de la Colgate University (1958) et d'un doctorat de pédagogie des mathématiques de l'Université du Minnesota (Etats-Unis d'Amérique) (1965), où il enseignait avant d'occuper son poste actuel. Il a, au cours des vingt dernières années, enseigné à tous les niveaux : primaire, secondaire et supérieur, et participé à la formation des maîtres de l'enseignement primaire et secondaire. Ses premiers travaux sur l'emploi des calculatrices et des ordinateurs dans les mathématiques scolaires remontent au milieu des années soixante. Il a été le directeur et l'un des auteurs du *Computer Assisted Mathematics Program* (CAMP) (1964–1970), projet de recherche et développement qui comprenait la publication d'une série de manuels et de livres du maître pour les classes d'élèves de 12 à 18 ans. Ce materiel avait pour principe de faire rédiger des programmes informatiques par les élèves eux-mêmes, pour l'étude de sujets mathématiques et la résolution de problèmes. Son ouvrage le plus récent est un livre intitulé *Explore Mathematical Ideas with your Micro Computer : A book for kids aged 9–90* (Explorez les notions mathématiques avec votre micro-ordinateur : un livre pour les enfants de 9 à 90 ans) (sous presse). Il fut aussi le premier rédacteur en chef du *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME) (volume 1 à 4). Il a publié sur divers sujets de nombreux articles de recherche ou de caractère "pratique".

REGINALDO NAVES DE SOUZA LIMA est professeur associé de logique et d'algèbre moderne à l'Université fédérale du Minas Gerais (UFMG), au Brésil. Il est diplômé de l'UFMG, avec spécialisation en mathématiques, et titulaire d'une maîtrise d'enseignement des sciences et des mathématiques de l'Université de Campinas (UNICAMP). Il mène actuellement des expériences sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux du primaire et du secondaire, par l'intermédiaire du Centre de formation des enseignants de sciences du Minas Gerais (CECIMIG) de Belo Horizonte.

MICHAEL MITCHELMORE est maître de recherches à la School of Education de l'University of the West Indies, à la Jamaïque. Il est titulaire d'un B.A. de mathématiques de l'Université de Cambridge (1961), d'un diplôme de troisième cycle en sciences de l'éducation de l'Université de Bristol (1962) et d'un doctorat de pédagogie des mathématiques de l'Université d'Etat de l'Ohio (1974). Il a enseigné les mathématiques pendant plusieurs années dans des écoles secondaires du Ghana, où il a animé unprojet d'aménagement du programme scolaire de mathématiques dont les documents sont encore largement utilisés en Afrique de l'Ouest et aux Antilles. Il s'est établi à la Jamaïque en 1973, après deux ans d'études universitaires supérieures aux Etats-Unis d'Amérique. Après avoir travaillé un certain temps au Ministère de l'éducation à Kingston, au service des examens, il a été nommé à son poste actuel en 1976. Son principal sujet de recherche est la visualisation spatiale

chez les enfants des pays en développement et ses liens avec leurs résultats en mathématiques.

ALAN OSBORNE est professeur de pédagogie des mathématiques à l'Université d'Etat de l'Ohio, à Columbus, Ohio (Etats-Unis d'Amérique). Il a fait ses études supérieures de premier cycle à l'Earlham College et a une maîtrise de mathématiques et un doctorat de pédagogie des mathématiques de l'Université du Michigan. Il a enseigné les mathématiques scolaires pendant sept ans avant de terminer ses études universitaires. Ses principaux travaux de recherche portent sur la formation des concepts de la mesure chez les enfants et sur les stratégies d'estimation. Il a dirigé récemment le projet PRISM qui a fourni certaines des données utilisées par le National Council of Teachers of Mathematics pour rédiger *The Agenda for Action,* plan d'action dans le domaine des programmes scolaires de mathématiques pour les années 80.

FIDEL OTEIZA M. est maître-assistant et chercheur au département de mathématiques et d'informatique de la Faculté des sciences de l'Université de Santiago du Chili. A ce titre, il est chargé de la coordination du programme de troisième cycle sur l'enseignement des mathématiques. Ayant une grande expérience de l'enseignement des mathématiques, il s'est spécialisé dans l'élaboration des programmes scolaires. Il s'intéresse principalement à l'éducation des adultes, à la conception, la réalisation et l'expérimentation des systèmes d'apprentissage et à l'évaluation des programmes éducatifs.

MICHELE PELLEREY est directeur du Départment de pédagogie de l'Université Salésienne de Rome. Il est né à Gênes (Italie) en 1935. Il est docteur en mathématiques, spécialisé en psychopédagogie. Il a mené de nombreuses recherches sur les processus d'apprentissage des concepts mathématiques et a dirigé l'important projet RICME sur l'enseignement des mathématiques du niveau élémentaire. Il participe actuellement à deux projets : le premier porte sur l'apprentissage des concepts et des méthodes de l'informatique au niveau pré-universitaire et dans la formation professionnelle et le second sur l'apprentissage des mathématiques chez les enfants handicapés.

THOMAS R. POST, est professeur de pédagogie des mathématiques à l'Université du Minnesota à Minneapolis, Etats-Unis d'Amérique. Il a publié dans toutes les grandes revues des Etats-Unis traitant de la recherche et de la méthodologie en pédagogie des mathématiques et a cosigné deux livres, l'un sur les travaux pratiques de mathématiques, l'autre sur les études interdisciplinaires au niveau de l'enseignement élémentaire et du premier cycle de l'enseignement secondaire. Ses recherches portent sur la formation des premiers concepts numériques et le développement des concepts relatifs aux nombres rationnels chez l'enfant d'âge scolaire. Il est actuellement un des principaux chercheurs du *Rational Number Project* subventionné par la National Science Foundation, projet qui a pour but d'élaborer des hypothèses concernant l'influence des matériels de manipulation sur l'apprentissage des concepts relatifs aux nombres rationnels.

BRYN ROBERTS s'occupe de la formation des maîtres et de l'élaboration des programmes scolaires en Papouasie-Nouvelle-Guinée. Il est titulaire d'une maîtrise d'aménagement des programmes scolaires de l'Université du Sussex (Angleterre) mais s'intéresse surtout à l'enseignement des mathématiques dans les pays en développement. Après avoir enseigné brièvement dans son pays natal, le Pays de Galles, il a pris un poste dans une école secondaire en Zambie. Il s'est consacré ensuite à la formation des maîtres, d'abord au Botswana puis au Swaziland.

PETER SANDERS est maître de conférences de pédagogie des mathématiques à l'Université du Pacifique Sud, à Fidji. Il a une maîtrise de mathématiques des Universités d'Oxford et de Londres. De 1959 à 1968, il a enseigné les mathématiques à l'University of the West Indies puis à l'Université de Nairobi. De 1968 à 1976, il a travaillé à des projets de formation des maîtres de l'Unesco, d'abord à l'Université de Zambie, puis à l'Université du Botswana, au Lesotho et au Swaziland. Il est arrivé à Fidji en 1976. Il a apporté un concours actif aux associations de mathématiques des pays où il a travaillé et y a assumé pendant certaines périodes les fonctions de président (au Kenya), de trésorier (en Zambie) et de secrétaire (à Fidji).

JAMES SCHULTZ est professeur associé de mathématiques à l'Université d'Etat de l'Ohio aux Etats-Unis d'Amérique. Il a une maîtrise de mathématiques et un doctorat de pédagogie des mathématiques de cette université. Il a enseigné les mathématiques scolaires pendant cinq ans, après ses études universitaires de premier cycle à l'Université du Wisconsin. Il est spécialiste de la formation en mathématiques des enseignants de l'école élémentaire et a participé à des programmes de formation des maîtres dans plusieurs universités américaines, ainsi qu'en Indonésie et au Costa Rica.

HILARY SHUARD est directrice adjointe du Homerton College de Cambridge, au Royaume-Uni. Après des études universitaires de premier et de second cycles en mathématiques à Oxford et à Cambridge, elle a enseigné dans diverses écoles avant d'être nommée à la tête du Département de mathématiques de Homerton College, institut de formation pédagogique actuellement intégré à l'Université de Cambridge, et continue à avoir des activités dans le domaine de la pédagogie des mathématiques. Elle a récemment fait partie de la commission Cockcroft, chargée par le gouvernement d'effectuer une enquête sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires et secondaires britanniques. Elle s'intéresse principalement aux mathématiques du primaire ainsi qu'à l'enseignement de l'analyse.

RANDALL J. SOUVINEY est coordonnateur associé du programme de formation des enseignants de l'Université de Californie, à San Diego (Etats-Unis d'Amérique). Il est titulaire d'un doctorat de pédagogie des mathématiques de l'Université d'Etat de l'Arizona (1977). Il a à son actif vingt ans d'une carrière variée dans l'enseignement. Après huit ans d'enseignement à l'école primaire et secondaire, il a été nommé directeur d'études pédagogiques à l'Université de Californie. Au cours des

dix dernières années, il a publié plus de quarante articles dans diverses revues d'enseignement et de recherche. Il a rédige des comptes rendus critiques pour plusieurs éditeurs et revues, dont *Investigations in Mathematics, School Science and Mathematics,* Goodyear Publishing Company et Scott, Foresman and Company. De 1979 à 1981, il a occupé le poste, subventionné par l'Unesco, de directeur du projet indigène de mathématiques en Papouasie-Nouvelle-Guinée, et il a dirigé la publication d'une importante série de documents de travail rendant compte des résultats des recherches menées au titre du projet dans les domaines de la cognition, de l'ethnographie et de l'élaboration des programmes scolaires. Il s'occupe actuellement de la formation initiale des maîtres et termine son quatrième livre, intitulé *Learning to Teach Mathematics,* qui doit paraître chez Scott, Foresman and Company.

P. K. SRINIVASAN a été enseignant de mathématiques aux Etats-Unis d'Amérique au titre d'une bourse d'échange Fulbright et Senior Education Officer ainsi que maître de conférences de mathématiques au Nigéria. Il s'occupe depuis plus de trente ans de pédagogie des mathématiques. Il est l'auteur de livres récréatifs et de livres d'enrichissement en mathématiques pour les enfants. Il a écrit de nombreux articles sur l'enseignement des mathématiques dans *Mathematics Teacher* (Inde) et *Mathematics Teacher* (Etats-Unis). Il s'intéresse aux techniques d'improvisation immédiate dans l'enseignement des mathématiques à l'école et dans les établissements de formation pédagogique. Il a dirigé plus de cinquante expositions mathématiques en Inde et à l'étranger. Il a été membre fondateur et secrétaire honoraire de la Fondation Ramanujan et est membre à part entière du Congrès international de l'enseignement mathématique.

MARIA DO CARMO VILA est chargée de cours à l'Université fédérale du Minas Gerais (UFMG), au Brésil. Elle est titulaire d'une licence de mathématiques de la Faculté de philosophie, de sciences et de lettres de Guaxupé, ainsi que d'une maîtrise d'enseignement des sciences et des mathématiques de l'Universitié de Campinas (UNICAP). Elle enseigne l'algèbre linéaire et les mathématiques du début du premier cycle post-secondaire. Elle mène actuellement des expériences sur l'enseignement des mathématiques au niveau de l'école primaire et secondaire dans le cadre du Centre de formation des enseignants de Sciences du Minas Gerais, à Belo Horizonte.

GERHARD WALTHER est professeur de pédagogie des mathématiques à l'Institut de formation des enseignants de mathématiques de Kiel (République Fédérale d'Allemagne). Après des études de mathématiques pures, il a travaillé pendant dix ans (à partir de 1971) dans le domaine de la formation des enseignants de mathématiques à l'Université de Dortmund où il a passé son doctorat et son "habilitation" (sur la lecture des textes mathématiques). Ses autres domaines de recherche sont la psychologie de l'apprentissage des mathématiques, la philosophie de l'enseignement des mathématiques et les stratégies de formation des maîtres.